---

date = '2025-03-01T18:51:10+08:00'
draft = true

categories = [
    "大二春夏",
]
author = "Brent"
tags = [
    "工流",
]

image = "https://t.alcy.cc/ycy?random=1f56051a"

title = '工程流体力学'

---

# 流体静力学

## 静止状态

**静止或者是相对静止**的流体，质点之间没有**相对运动**，**粘性**表现不出来，剪应力为0。

> - 静止流体质点间只存在**正应力**，以压应力的形式体现
> - 静止是**压应力与体积力**相互平衡的结果

---

> Note
>
> 静压强的特性：
>
> 1. 各向等值——点性质，与方向无关
> 2. 作用垂向性——总是作用于物体表面法向

**欧拉平衡方程**：

$$
f_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0
$$

$$
f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0
$$

$$
f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0
$$

$$
dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz)
$$

## 绝对压强、相对压强、真空压强

1. 绝对压强：以真空压强（0）为基准的压强
2. 相对压强（表压）：以大气压强为基准的压强
3. 真空压强：当绝对压强小于大气压时，其差值为真空压强（负表压的绝对值）

## 静水压

**静止状态：** 在连续、均匀、静止流体中，**压强只和垂直高度相关**，与容器形状无关，水平面上压强相等

## 有加速度情况下的静压强

> 设有水平加速度$\vec{a}$，则
>
> $$
> \nabla P = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a})
> $$
> $$
> \theta = \tan^{-1}\frac{a_x}{g + a_z}
> $$
>
> - 压强增加率要大于无加速度情况
> - 与容器大小与形状无关
> - 等压面平行于自由面

对于一般的情况：

$$dp = \rho(-adx - gdz)，\text{两端积分}$$
$$p = \rho g(-\frac{a}{g}x - z) + c$$
$$\text{将坐标原点选在自由面的中心}$$
$$p = p = \rho g(-\frac{a}{g}x - z) + p_a$$

## 有旋转情况下的静压强

压强（选择最低点处为原点）：

$$p = p_0 - \rho gz + \frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2$$

> 壁面处液面升高相对于原来的水平面为h/2

## 基本的压强

相当于高中的物理的压强大题

### 相对压强

课程中所有的计算好像使用的都是相对压强（好像）

- 与未封闭的空气接触的，表面的相对压强为0
- 压力表的示数就是相对压强
- 真空表的示数的负值为相对压强
- 题干中给的是相对的压强
- 真空的绝对压强为0

绝对压强=相对压强+标准大气压

> 解题：
>
> 连续的**气体**中，各处的压强是相等的
>
> 连续的**液体**中，压强差取决于高度差，等高处的压强相等（连通器的原理）

## 对平面总压力的计算

- 液体在封闭的容器内时，画出虚设的液面的水平线（也就是假设为与大气压直接接触的假想的页面），为建立坐标系的原点所在的点，**确定作用点时非常重要**
- 一般的题都是直接接触大气压的，不用管
- 平面的延长线与液面相交，为原点O
- 计算闸门的中点（形心）c到o的距离为y，到液面的距离为h，则平均的压强的大小为 $\rho gh$
- 作用点到形心的距离为 $\frac{I_c}{ys}$，s为面积
- 之后的总压力和力矩就按照基本的力学公式计算

## 液面对曲面的总压力的计算

- 曲线是否左右对称
  - 对称：不存在水平的分力
  - 非对称：存在，转到下一步
- 水平的分力为$\rho gh$
  其中的h为在**竖直方向**的投影的中点
  A：对半球来说是投影的圆面积；对于其他好像也是
- 竖直方向的分力用那个压力体：（压力体是所求面的左右两端向上做两条线，与液面的交点）
  - 实压力体：压力体和液体在曲面的同侧
  - 虚压力体：相反
  - 两者是可以叠加的

# 流体的动力学

> 这部分一般记忆公式，不要搞混就行

- 基础：
  - 是否是恒定流
  - 旋转角速度，线变形，角变形
  - 连续性条件
  - 流线方程
- 函数
  - 无旋流动存在速度势函数
  - 满足连续性条件存在流函数
  - 这两个要区分开，我是按照判断条件和求解的微分算子正好是相反的，来记忆的，求解本质上是常微分方程，注意有一个是带有**负号的**

# 相似原理与量纲分析

## 相似原理

按照相似性原理与量纲分析设计模型，选择流动的介质

### 相似条件

1. 几何相似
2. 运动相似
3. 动力相似
4. 相似判据：
   取各种力与惯性力的比值，得到**雷诺数**，如下：（这是粘性力相似的条件）

   $$Re = \frac{F_1}{F_\tau} = \frac{uL}{v}$$

   雷诺数就是两个流动粘性力相似的判据
   将表中的无量纲数统称为相似准则数

- 惯性力相似的条件：

$$\frac{F_{I_p}}{F_{I_m}} = \frac{\rho_p u_p^2 l_p^2}{\rho_m u_m^2 l_m^2}$$

> 流动相似的充分必要条件：
>
> 几何相似，运动相似和动力相似
>
> 或者满足以下的单值条件：几何、物理、边界、初始条件

# 量纲分析

## 量纲和谐原理

物理方程式中的各项必须量纲完全一致。只有相同量纲的物理量才能相加减。

对于相同量纲齐次的方程，只要使用方程的任一量纲除其他各项，变成无量纲量

## 量纲分析的方法

1. 基本的量纲：L,T,M,$\theta$
2. 瑞利法
   1. 列出所有印象这一物理过程的全部n+1个物理量，基本量纲的乘除
   2. 解出方程
3. $\pi$定理
   1. 组成无量纲的数（选择r个量纲不同的物理量，与其余的物理量组成无量纲数）（一共有k-r个$\pi$数）
   2. 重复变量与其余变量
   3. 其中的重复的变量必须是包括所有的量纲的，组成的指数行行列式不为0

# 模型实验

## 全面力学相似模型试验

> 要达到全面的相似，必须所有的相似准则相等，且初始的条件和边界条件相相似。但是这是不现实的
>
> 所以在正常的生产中选择主要的因素，使其相等

## 近似莫化法

> 抓住主要的矛盾
>
> 雷诺准则：
> - 雷诺数 $R_e$：$R_e=\frac{\rho v l}{\mu}=\frac{vl}{\nu}$
> - 惯性力与黏滞力之比
> - $R_e$ 相等，黏滞力相似
>
> 弗劳德准则：
> - 弗劳德数 $F_r$：$F_r=\frac{v}{\sqrt{gl}}$
> - 惯性力与重力之比
> - $F_r$ 相等，重力相似
>
> 欧拉准则：
> - 欧拉数 $E_u$：$E_u=\frac{p}{\rho v^2}$
> - 压力与惯性力之比
> - $E_u$ 相等，压力相似
>
> 柯西准则：
> - 柯西 $C_a$：$C_a=\frac{\rho v^2}{K}$
> - 惯性力与弹性力之比
> - $C_a$ 相等，弹性力相似
> - 用于水击现象研究
>
> 不过也不怎么考
>
> 出现粘性力，雷诺数这些就用雷诺准则
>
> 反正出现什么就用什么

# 流体动力学

这部分是难度最大的部分，可能会有多个公式的叠加，本质上应该是压强和能量守恒的叠加。

### 连续性方程

$$Q = vA$$

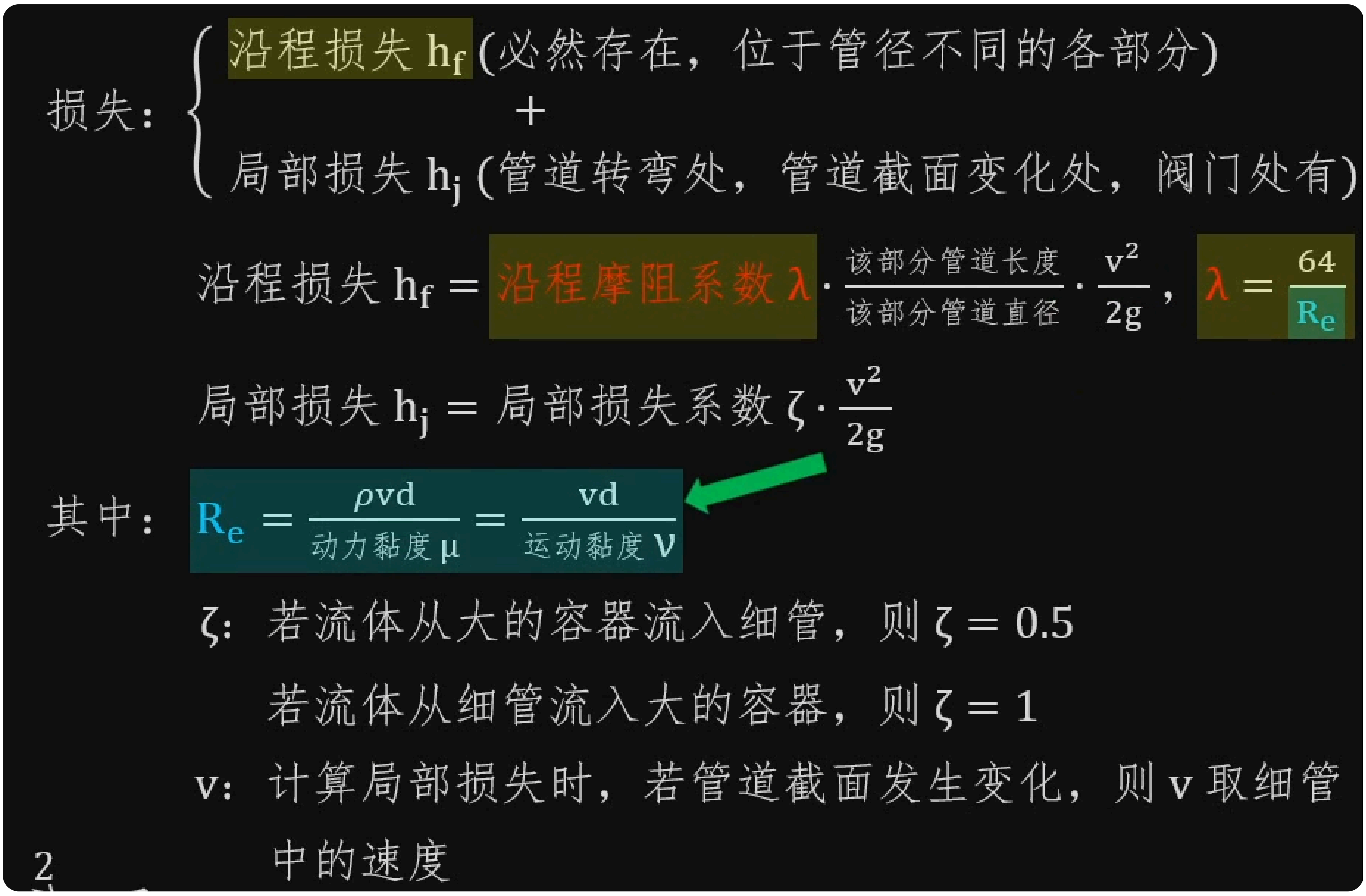
- 一进一出：两个截面的流量相等
- 一进两出：进截面的等于出截面的相加

### 管内压强的计算

> 就是之前的静压强的进阶
>
> 4、题目中有文丘里管(管道内，俩截面上方均连有一个竖管，且竖管内液体与管道内液体相同)，则
>
> $$p_{先} - p_{后} = \rho g(h_{先经过截面处竖管液面-后经过截面处竖管液面} - h_{先-后})$$
>
> 5、若题目中有毕托管(管道内，俩截面之间接一 U 型管，且 U 型管内液体与管道内液体不同)，则
>
> $$p_{先} - p_{后} = (\rho_{U型管液体} - \rho_{管道液体})gh_{U型管液面高差} - \rho_{管道液体}gh_{先-后}$$
>
> 后流过的截面，U 型管内液面更高

### 流体的损失

分为局部水头损失和沿程水头损失，记忆公式就行




## 伯努利方程

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

必须是沿着流线的伯努利方程

## 计算

> 现在伯努利方程中的压强、流速、高度这些都有计算的方法了（就是上面的几节），难题往往是综合的

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + z_2 + h_w$$

步骤：

- 选择控制面（一般选择简单的，比如可以选择水槽这种流速为0，压强为0的）
- 在选择面上计算压强、流速、水头损失
- 带入伯努利方程中进行求解

> 水头损失：h，是高度的一个字母，实际上代表的是一种能量的损失（乘以$\rho g$）
>
> **扬程**是泵类设备的性能参数，用于描述流体被输送的高度或压力
>
> 因为伯努利方程本身就是能量守恒除以$\rho g$，所以现在就用高度表示这些损失还有扬程

### 动量方程

就是大物中学习的动量方程和角动量方程的计算，只不过变成流体了而已

- 确定流体的受力
  - 进口的受力与流速方向相同，大小为相对压强乘以面积
  - 出口的方向相反，一般与大气相接时这两项就都是0了
  - 管道对流体的作用力：
    - 力的作用点在拐弯处，为法线方向，指向液体
    - 固定件处，力的方向与液体的流动方向相反
  - 列出动量方程

    $$\begin{aligned} &\mathrm{x}\text{ 轴方向力的和} = \text{出口}\rho \mathrm{Qv_x}\text{ 之和} - \text{入口}\rho \mathrm{Qv_x} \\ &\mathrm{y}\text{ 轴方向力的和} = \text{出口}\rho \mathrm{Qv_y}\text{ 之和} - \text{入口}\rho \mathrm{Qv_y} \end{aligned}$$

    对于流体，单位时间质量为$\rho Q$

# 孔口管嘴出流

这部分讲过吗，还是我刚好没听？😅

还是记公式

孔口出流的分类 $\begin{cases} \text{自由出流：液体由孔口流入大气} \\ \text{淹没出流：液体由孔口直接流入另一部分液体中} \end{cases}$

| 孔口 |
| --- |
| 若题目没让我们求孔口流速系数 φ，孔口收缩系数 ε，孔口流量系数 μ，则直接用 $\varphi = 0.97$，$\varepsilon = 0.64$，$\mu = 0.62$ |
| 流量 $Q = v_c A_c$<br>收缩断面的流速 $v_c = \varphi\sqrt{2gH}$ 、 $\frac{\text{收缩断面面积}A_c}{\text{孔口面积}A} = \varepsilon$<br>$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\text{孔口局部损失系数}\zeta}} = \frac{\mu}{\varepsilon}$<br>H: $\begin{cases}\text{液体通过孔口流入空气：孔口中心点到液面的高度} \\ \text{液体通过孔口流入液体：俩液面之间的高度差}\end{cases}$ |

| 管嘴 |
| --- |
| 若题目没让我们求管嘴流速系数 φ，管嘴流量系数 μ，则直接用 $\varphi = 0.82$，$\mu = 0.82$ |
| 流量 $Q = vA$<br>管嘴出口流速 $v = \varphi\sqrt{2gH} = \mu\sqrt{2gH}$ 、 A：管嘴的面积<br>$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\text{孔口局部损失系数}\zeta}}$ 、 收缩断面真空高度 $= 0.75H$<br>H：管嘴口中心点到液面的高度 |

考了个**简答题**

# 不可压缩流体的外部流动

## 边界层的基本概念

### 基本概念

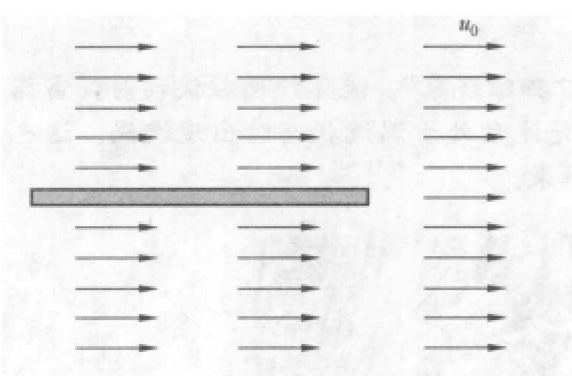



图 9.1 理想流体平板绕流

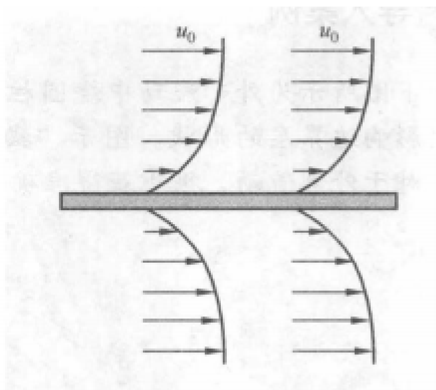



图 9.2 真实流体平板绕流

**右图的为真实气体的绕流**

把这种**大Re数下流体绕流物体表面**的速度梯度变化很大的**薄层称为边界层**(boundarylayer)。在边界层以外,由于**速度梯度甚小,故其中粘性切应力甚微,因此可视为理想流体。**

> 所以，在大雷诺数的情况下，很薄的层为边界层（速度变化非常快），粘性力的作用明显，但是在边界层之外，粘性的切应力很小，可以看做是理想气体

**边界层厚度**$\delta$：到达流体来流速度的99%处到平板的距离

> 边界层理论的意义：
>
> - 当雷诺数很大时，可以将物体表面的流场分为边界层流动和边界层外的势流流动
>   - 对于边界层，使用边界层方程进行求解
>   - 对于势流流动，使用理想流体的欧拉方程求解
> - 对于小雷诺数时，惯性项远小于粘性项，可以忽略惯性项，简化

## 基本特征

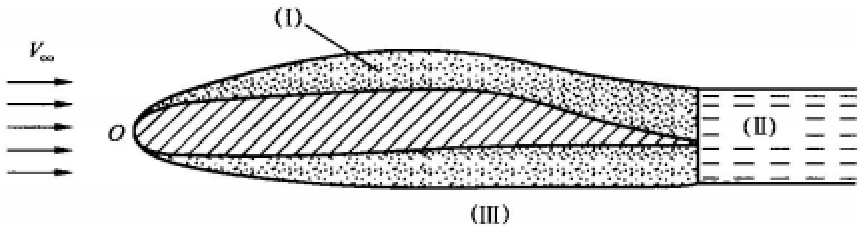



图 9.4 绕流边界层

图中的流场分为三个区域：

1. 边界层
2. 尾流区
3. 外部势流

> - 对于小雷诺数的情况，边界层较厚，且向前延伸
> - 对于大雷诺数的情况，边界层很薄，边界层内的速度梯度很大，粘性切应力很大；外部的速度梯度很小，**粘性切应力很**小

> 边界层内存在两种流态：**层流**边界层和**湍流**边界层

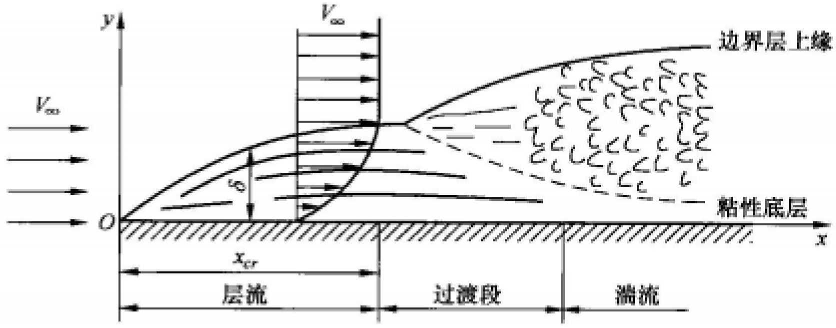


图 9.6　边界层的流态

- 判断层流还是湍流的方式：

$$Re_x = \frac{V_\infty x}{v}$$

> 其中的x为离物体的前段的距离，V为势流速度
>
> 对于平板边界层来说：临界的雷诺数为$Re_x = 3 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$。

> 综上所述,边界层的基本特征为:
>
> 1. 与物体的特征长度L相比,边界层的厚度很小,即&/L=1;
> 2. 边界层内沿物面法向的速度变化剧烈,即速度梯度au/ay很大;
> 3. 边界层内粘性力和惯性力为同一数量级;
> 4. 边界层沿流动方向**逐渐增厚;**
> 5. 边界层流体的流动也分为层流和湍流两种流态,用Reg数判别;
> 6. **边界层内压强p与y无关即p=p(x)**,故边界层各横截面上的压强等于同一截面上边界层外边界上的压强。

# 边界层微分方程

理想流体的区域可以使用之前的6章中的位势理论求解

但是，边界层内的粘性流体的流动怎么解决

- 方程为：

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}=0$$
$$\text{边界条件为 } y=0, u_x=u_y=0; y=\delta, u_x=V_\infty$$

上述的方程可以简化为:

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}=-V_\infty\frac{\mathrm{d}V_\infty}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$$

## 边界层的动量积分方程

由于上述的方程求解起来还是较为困难

- 在定常流动的条件下:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^s\rho u_x^2\mathrm{d}y-V_\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^s\rho u_x\mathrm{d}y=-\delta\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-\tau_0$$

- 在非定常的条件下:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^s \rho u_x \mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^s \rho u_x^2 \mathrm{d}y - V_\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^s \rho u_x \mathrm{d}y = -\delta\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \tau_0$$

# 平板边界层的近似计算

## 层流的平板边界层

- 边界层厚度：

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13}\frac{\mu x}{V_\infty}} = 4.64 x Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

- 速度分布式：

$$u_x(y) = V_\infty(0.323x^{-1}yRe_x^{\frac{1}{2}} - 0.005x^{-3}y^3Re_x^{\frac{3}{2}})$$

- 切应力：

$$\tau_0 = \frac{3\mu V_\infty}{2\times 4.64\sqrt{\nu x/V_\infty}} = 0.323\sqrt{\frac{\mu\rho V_\infty^2}{x}} = 0.323\rho V_\infty^2 Re_{\mathrm{L}}^{-\frac{1}{2}}$$

- 总的摩擦阻力：

$$F_t = b\int_0^L \tau_0 \mathrm{d}x = 0.323b\int_0^L \sqrt{\frac{\mu\rho V_\infty^3}{x}}\mathrm{d}x = 0.646bL\rho V_\infty^2 Re_{\mathrm{L}}^{-\frac{1}{2}}$$

- 使用摩擦的阻力系数代替摩擦阻力：（这个就是前面的动力相似的常数）

$$C_1=\frac{F_1}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A}$$

对于平板来说，A=bL

$$C_\mathrm{f}=1.292Re_\mathrm{L}^{-\frac{1}{2}}$$

## 湍流的

- 边界层厚度：

$$\delta=0.37\left(\frac{\nu}{V_\infty}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{4}{5}}=0.37xRe_x^{-\frac{1}{5}}$$

- 其他的我就不写了，和层流的一样

$$\delta=0.37\left(\frac{\nu}{V_\infty}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{4}{5}}=0.37xRe_x^{-\frac{1}{5}}$$

$$\tau_0=0.225\rho V_\infty^2\left(\frac{\nu}{V_\infty}\right)^{\frac{1}{4}}\left(0.37\left(\frac{\nu}{V_\infty}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{4}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}=0.0289\rho V_\infty^2 Re^{-\frac{1}{5}}$$

$$F_i=b\int_0^L\tau_0\mathrm{d}x=0.0289\rho V_\infty^2\left(\frac{\nu}{V_\infty}\right)^{\frac{1}{3}}b\int_0^L x^{-\frac{1}{5}}\mathrm{d}x=0.036bL\rho V_\infty^2 Re_\mathrm{L}^{-\frac{1}{5}}$$

$$C_{\mathrm{f}} = \frac{0.455}{(\lg Re_{\mathrm{L}})^{2.58}} \quad (10^5 \leqslant Re \leqslant 10^9)$$

最后的为**平板的阻力系数**

> 计算：
>
> 1. 判断边界层的流态
> 2. 计算$x_{cr}$的大小,确定层流和湍流的分界
>
> $$x_{\alpha} = \frac{Re_{\alpha}\nu}{V_{\infty}} = \frac{5\times10^5\times1.42\times10^{-5}}{3.2}\mathrm{m} = 2.2\mathrm{m}$$
>
> 3. 使用相应的公式进行计算
> 4. 算边界层的厚度，算阻力系数（最主要的两个参数）

## 沿曲面的边界层及分离现象

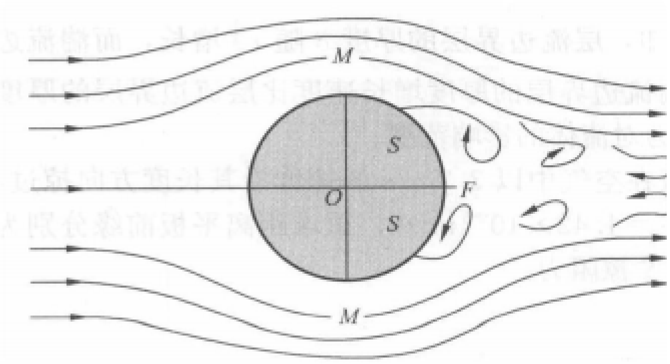



**图 9.10　粘性流体绕圆柱体的流动**

压强的关系：O>F>M

则从O-M是顺压强梯度的流动

但是M-F是逆压强梯度的流动

由边界层理论：

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

边界层的分离：

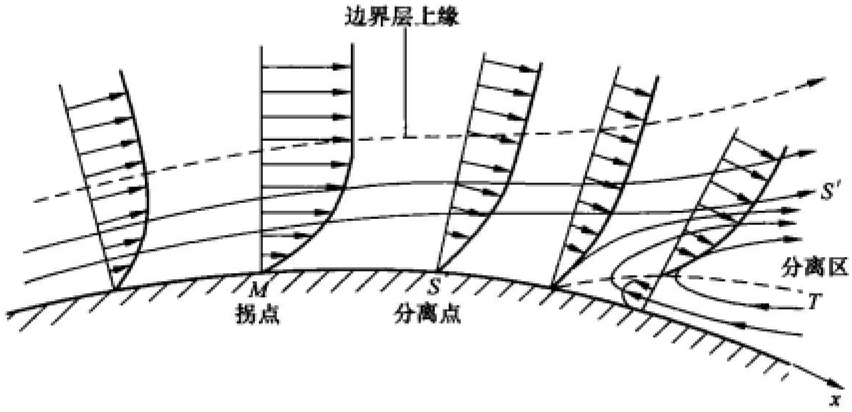



图 9. 11 边界层分离的形成过程

# 粘性流体绕着小圆球的蠕流流动

## 斯托克斯阻力系数

在**小雷诺数情况下的绕着小球**的流动（蠕流）

- 速度和压强分布式

$$u_r = V_\infty \cos\theta \left[1 - \frac{3}{2}\frac{r_0}{r} + \frac{1}{2}\frac{r_0^3}{r^3}\right]$$

$$u_\theta = V_\infty \sin\theta \left[1 - \frac{3}{4}\frac{r_0}{r} + \frac{1}{4}\frac{r_0^3}{r^3}\right]$$

$$P(r,\theta) = p_0 - \frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty r_0}{r^2}\cos\theta$$

- 阻力公式（阻力系数）

$$C_{\mathrm{f}}=\frac{F_{\mathrm{f}}}{\frac{1}{2}\rho V_{\infty}^{2}A}=\frac{6\pi\mu r_{0}V_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho V_{\infty}^{2}\pi r_{0}^{2}}=\frac{24}{\frac{V_{\infty}d_{0}}{\nu}}=\frac{24}{Re}$$

## 颗粒在静止流体中的自由沉降

- 自由沉降的速度

$$V_{t}=\sqrt{\frac{4gd(\rho_{s}-\rho)}{3C_{t}\rho}}$$

  - 在Re<1时，符合斯托克斯的阻力系数

$$V_{\mathrm{f}}=\frac{1}{18}\frac{g}{v}\frac{\rho_{s}-\rho}{\rho}d^{2}$$

  - <1000时，

$$C_{\mathrm{f}}=\frac{24}{Re}+\frac{6}{\sqrt{Re}}+0.4$$

$$0.4V_{\mathrm{f}}^{2}+6\sqrt{\frac{vV_{\mathrm{f}}^{3}}{d}}+\frac{24v}{d}V_{\mathrm{f}}-\frac{4}{3}gd\frac{\rho_{s}-\rho}{\rho}=0$$

  - <200000

$$V_{\mathrm{f}}=\sqrt{2.8gd\frac{\rho_{s}-\rho}{\rho}}$$

# 粘性物体绕流的阻力

## 摩擦阻力和压差阻力

绕流阻力由**摩擦阻力和压差阻力**组成

公式

$$F_{\mathrm{D}}=(C_{\mathrm{f}}A_{\mathrm{f}}+C_{\mathrm{p}}A_{\mathrm{p}})\frac{\rho V_{\infty}^{2}}{2}\quad \text{或}\quad F=C_{\mathrm{D}}\frac{\rho V_{\infty}^{2}}{2}A$$

$C_D$称为绕流系数

## 绕流物体的升力

$$F_L=C_L\rho\frac{V^2}{2}A$$

式中:$C_L$为升力系数(lift coefficient),升力系数主要依赖于冲角和物体的横截面的形状;$A$ 为物体或升力矢量体的投影面。

$$F=\rho V\Gamma l$$

> 上述为旋转圆柱在流体中收到的力的表达式
>
> 其中的V为相对速度，l为长度,$\rho$为流体的密度
>
> T一样的符号为环量，大小为$\Gamma=2\pi R\cdot V_{\text{表面}}$为圆柱表面的旋转线速度

## 做题的感悟：

1. 带公式就行
2. 主要记住与雷诺数、切应力等等相关的公式

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y}\right)_{y=0}$$

# 可压缩流体的一维流动

## 音速和马赫数

### 音速

$$c = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} = \sqrt{k\frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}$$

上述为音速的计算公式，其中的R为空气的287，k=1.4，这里的温度T在喷管中是会时刻变化的量。

还可以使用体积模量来表示

$$E_v = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho/\rho}$$

$$c = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}}$$

不可压缩时，气体的音速将变为无穷大

### 马赫数

流场中的任一点的流速和当地的音速之比为该点的马赫数

$$Ma = \frac{V}{a}$$

> 马赫数越小，气体的压缩性的影响就越小，反之，压缩性的影响越大

> $(1) Ma < 1$, 则 $v < c$, 气流本身的速度小于声速, 为亚音速流动$(subsonic flows)$;
>
> $(2) Ma > 1$, 则 $v > c$,气流本身的速度大于声速，为超音速流动(supersonic flows);
>
> $(3) Ma \approx 1$, 则$v = c$,气流本身的速度等于声速，称为跨音速流动(sonic flows)。

## 气体的一维定常流动的基本方程

### 连续性方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}A}{A} = 0$$

> 表明**速度，密度，流管的截面积**三者的相对的变化量的代数和必须为0

### 能量方程

- 不可压缩流动的

$$zg + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C$$

- 省去比位能，加入能量的转换

$$u+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=C$$

最后的变式

$$\begin{aligned} h+\frac{v^2}{2}=C \\ C_pT+\frac{v^2}{2}=C \\ \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=C \\ \frac{kRT}{k-1}+\frac{v^2}{2}=C \\ \frac{c^2}{k-1}+\frac{v^2}{2}=C \end{aligned}$$

### 运动方程

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=C$$

## 定常流动的基本特性

### 滞止状态

> 流动速度为0的点的状态为滞止状态，角标使用0表示

$$
\begin{gathered}
h_0 = h + \frac{v^2}{2} \\
C_p T_0 = C_p T + \frac{v^2}{2} \\
\frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \\
\frac{k}{k-1} R T_0 = \frac{kRT}{k-1} + \frac{v^2}{2} \\
\frac{c_0^2}{k-1} = \frac{c^2}{k-1} + \frac{v^2}{2}
\end{gathered}
$$

注意区分这里的c和v：c是代表此点的温度下对应的声速，v是代表气体的流速，是有区别的

## 临界状态

> 断面上的速度为**此点对应的的音速**时为临界状态，使用角标*表示

$$
\begin{gathered}
\frac{T^*}{T_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{k+1}\right) \\
\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{-1}{k-1}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \\
\frac{p^*}{p_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{-k}{k-1}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}
\end{gathered}
$$

公式中的密度的标识为比体积的倒数

## 极限状态

$$
\frac{c_0^2}{k-1} = \frac{c^2}{k-1} + \frac{v^2}{2}
$$

由这个**能量守恒方程**

得出当能量全部转化为动能时的最大动能为

$$v_{\mathrm{mex}} = \sqrt{\frac{2}{k-1}}c_0$$

这时的内能和压能全部位移0，称为达到了极限状态

此时的热力学温度为0，绝对压强为0

# 喷管中的等熵流动

截面面积的变化率和压强的变化率之间的关系：

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} = -\frac{1-Ma^2}{kMa^2}\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

> 1. 亚音速时，只有截面缩小才能使压强降低、温度降低，焓降低，**气流加速**，截面增大使气流减速
> 2. 超音速时，与上面的相反
> 3. 音速流动时，处于临界的状态

## 喷管

### 渐缩喷管

> 需要求渐缩喷管的出口的流速和流量

- 在已知滞止时的压力和出口的压力的情况下（出口的压强小），**出口的流速为**

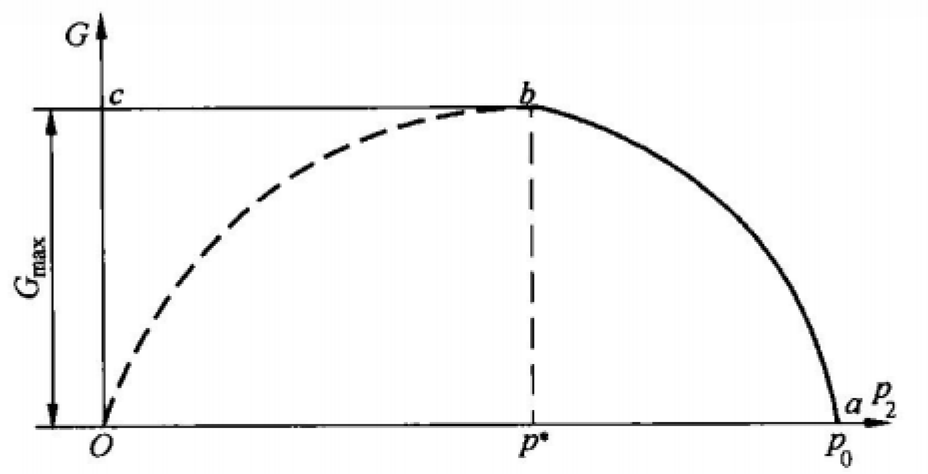
$$V_2=\sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

- 流量为

$$\begin{aligned}\mathrm{G}&=\rho_2A_2V_2\\&=\rho_0A_2\sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}}-\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]}\\&=\rho_0\left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}A_2\sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}\end{aligned}$$

观察公式可以看出：

1. 对于流速，出口的压强越小时，出口的流速越大，当出口的压强为0时，达到最大的流速，但是这个**流速好像达不到**，因为达到临界压强之后，随着面积的减小，压强会变大。
2. 对于出口的流量，最大时的压强取值为$p_2 = p_0\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = p^*$，此时的压强为临界压强，流量达到最大值，出口的速度为音速




3. 此时的最大流量为

$$G_{\max} = \rho_0 A_2 \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}} - \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\right]}$$
$$= A_2\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\sqrt{kp_0\rho_0}$$

所以，出口的压力达到临界压力之后，出口压力再降低，流量也保持到最大值不会变化

## 计算过程

1. 计算出口处的压强和滞止压强的比，与临界压强比较，确定是使用渐缩喷管还是缩放喷管
2. 计算各状态下的状态参数（带入等熵的公式），利用状态参数的值计算各状态下的流速
3. 利用流量和流速计算截面积

> 一些想法：
>
> 1. 知道某点的流速和声速的比值，就能知道温度和滞止温度的比值（利用能量方程和声速与温度的关系）
> 2. 然后就能算出状态参数
> 3. 速度和进出口的压强比也有直接的联系

## 有摩擦的等截面管内的绝热流动

绝热流动，则滞止焓为常数，但是由于有摩擦，所以熵不是恒定的

$$\lambda\frac{L}{D}=\lambda\frac{L_1^*}{D}-\lambda\frac{L_2^*}{D}=\frac{Ma_2^2-Ma_1^2}{kMa_1^2Ma_2^2}+\frac{k+1}{2k}\ln\frac{Ma_1^2}{Ma_2^2}\frac{1+\frac{k-1}{2}Ma_2^2}{1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2}$$

上述为临界管长的计算公式（即管子在有摩擦的情况下，能够到达1Ma所需的最短的管子长度）

## 激波的形成

流动钟流体参数突变的薄层叫做激波

### 马赫波

超音速流动时，气流的速度大于扰动的传播速度

# 复习

## 层流流动的剪应力

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}$$

> 其中的$\mu$为动力粘度

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

运动粘度和粘度之间的关系，差个密度的倍数

### 毛丝现象

$$h = \frac{4\sigma\cos\theta}{\rho g d}$$

$\sigma$是液体的表面张力系数

### 非牛顿流体

## 流体静力学

### 特性

> 各向等值性 —点性质(point property)，与方向无关
>
> 作用垂向性—总是作用于物体表面法向
>
> 压强变化最大的方向沿着重力方向
>
> 压强等值面垂直于重力方向

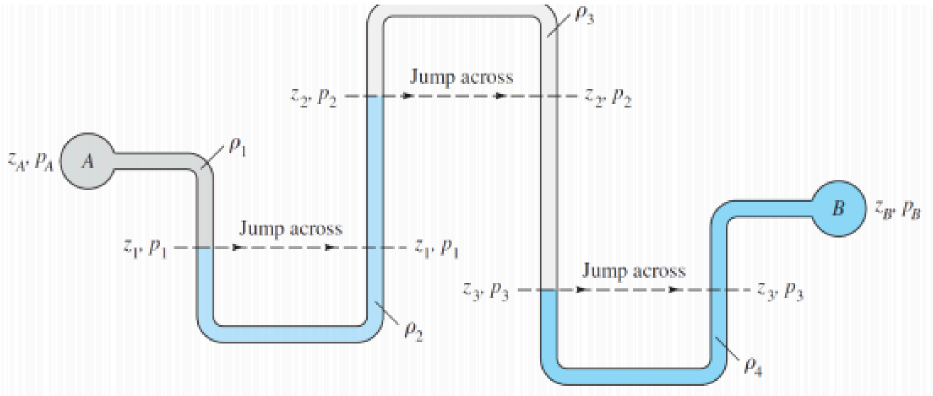
相邻的截面上的等高处的压强相等

取几个截面（一般以不同的液面为分界)

- 表压是以大气为参考零点

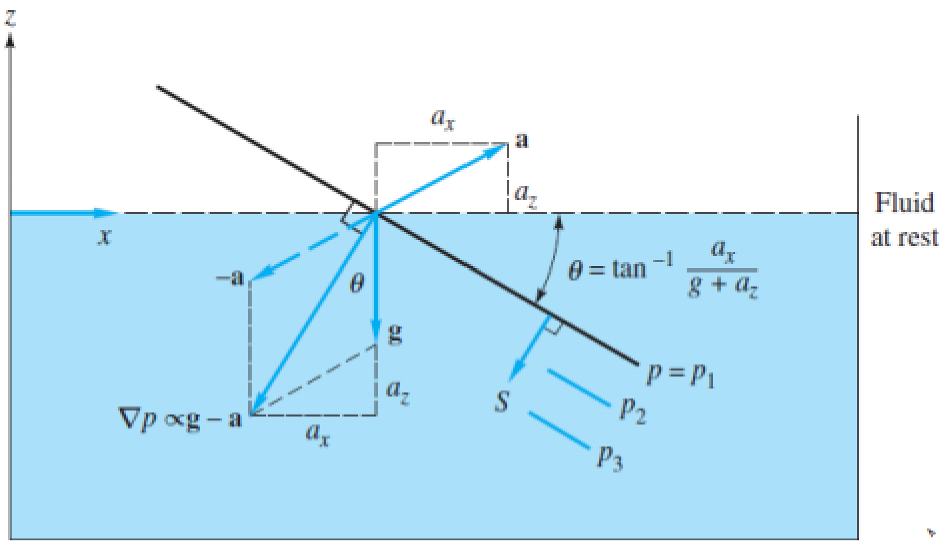
**帕斯卡定理**

**会求A、B两点的压强关系**




$$p_A + \rho_1 g(z_A - z_1) - \rho_2 g(z_2 - z_1) + \rho_3 g(z_2 - z_3) - \rho_4 g(z_B - z_3) = p_B$$

## 有加速度情况下的




- 压强的增加率大于无加速度的情况
- 与容器的大小和形状无关
- 取加速度的反向（但是重力·加速度就取向下的方向）

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a_x}{g + a_z}$$

$$\frac{dp}{ds} = \rho G \quad \text{where} G = [a_x^2 + (g + a_z)^2]^{1/2}$$

### 浸没平壁的受力分析

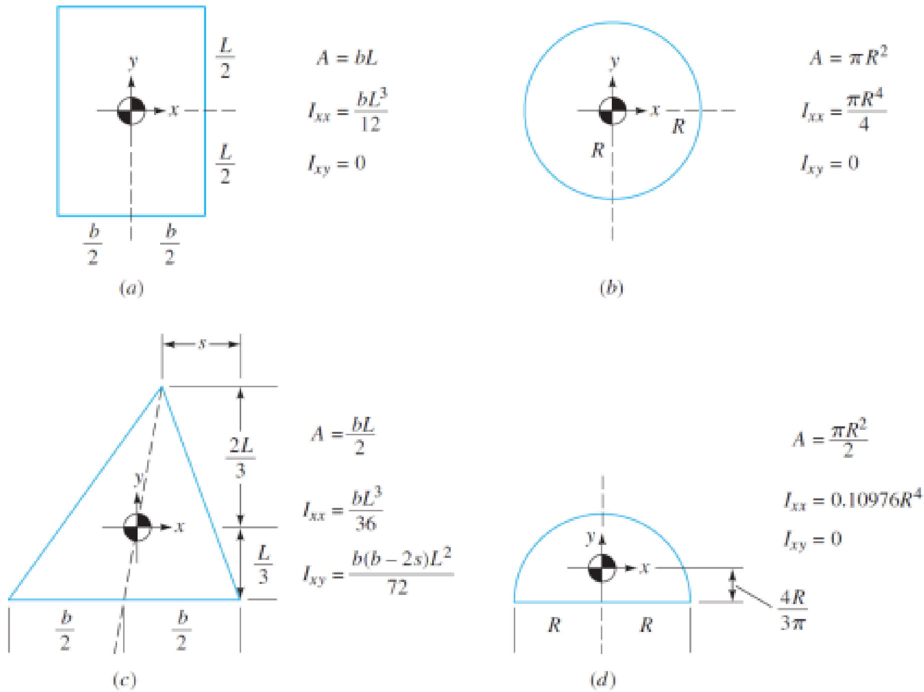
- 作用于平壁面的总压力等于其形心压强乘以面积
- 力的作用点的计算公式：

$$y_R = y_C + \frac{I_{Cx}}{y_C A}$$

其中的$I_{Cx}$为三角形对于通过形心且与对称轴垂直的轴（就是针对x轴的惯性矩）的惯性矩

- 作用点位于
  - 积分法
  - $$y_{\mathrm{CP}} = -\gamma \sin\theta \frac{I_{xx}}{P_{\mathrm{CG}} A}$$
  - 其中的$gamma$为$\rho g$
  - 式子中的压强为形心位置的压强
  - $\theta$是和水平面的夹角
  - Ixx为关于形心x轴的二阶惯性矩
  - $$x_{\mathrm{CP}} = -\gamma \sin\theta \frac{I_{xy}}{p_{\mathrm{CG}} A}|$$

◦ **常见形状的二阶惯性矩**




- 浮力的计算

# 流体动力学

## 流线

- 流线是流场中任一时刻的一条几何曲线，其上各点的速度矢量均与此曲线相切。因此，**流线是同一时刻，不同流体质点所组成的曲线**。由欧拉法引出。

是不同的流体质点，相当于波形图（固定取的位置点，但是不固定是哪个流体质点）

> **特点**
>
> - 在定常流中，速度场不随时间改变，即 □ □ □ v t / 0，流线簇也不随时间改变，用一幅流线图就可以表示出流场的全貌
> - 流线密集的地方，表示流场中该处的流速较大，稀疏的地方，表示该处的流速较小

方程

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=\frac{dr}{V}$$

可以由速度求解流线方程

## 微分形式的质量守恒方程（连续方程）

- 不可压缩的连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\mathrm{div}\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

上述为散度的定义

- 线应变的速率

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}\quad\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}$$

- 体积应变的速率

$$\nabla\cdot V=divV=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$$

- 角应变速率

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})=\varepsilon_{yx}\quad \varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})=\varepsilon_{zy}$$
$$\varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z})=\varepsilon_{xz}$$

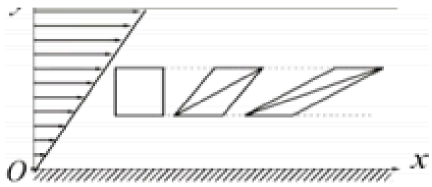
- 旋转角速度

$$\omega_x=\frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z})\quad \omega_y=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x})\quad \omega_z=\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})$$

判断流动时有旋的还是无旋的

已知平面流场为$u=ky$, $v=0$（$k$为常数）

试分析该流场的运动学特征.




解：流线方程　$udy=0$,　$y=c_1$（$c_1$为常数）

说明流线是平行于x轴的直线簇.

x、y方向的线应变率:　$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

流体微元面积扩张率:　$\nabla\cdot v=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

→ 说明流体微元无线变形，流动属不可压缩流动。

xy平面上的角变形率:　$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})=\frac{1}{2}k$

→ 说明流体微元有角变形。

流体旋转角速度:　$\omega_z=\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})=-\frac{1}{2}k$

→ 说明流体微元有旋转，流动为有旋流动。

**区分二维和三维流动！**

- 判断不可压缩（连续性）
- 判断有旋
- 判断有无角变形

## 流体的动力学

- **三维不可压缩牛顿流体的应力分量**

$$
\begin{gathered}
\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \quad \tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \quad \tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \\
\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{v}}\right)
\end{gathered}
$$

# 系统和控制体

- 受力的控制体分析

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbf{CV}} \mathbf{V}\rho dV\right) + \sum(m_i\mathbf{V}_i)_{\text{out}} - \sum(m_i\mathbf{V}_i)_{\text{in}}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{作用在控制体}\\\text{的合力}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{控制体的}\\\text{动量增长率}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{流出控制体的}\\\text{动量变化率}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{流入控制体的}\\\text{动量变化率}\end{array}\right\}$$

## 欧拉方程

$$
\begin{gathered}
\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\frac{du}{dt} \\
\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\frac{dv}{dt} \\
\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\frac{dw}{dt}
\end{gathered}
$$

为无粘的情况下的ns方程的简化

## 流函数

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

求解：

- 是否满足连续性
- 已知速度场 $u=a(x^2-y^2)\quad v=-2axy\ \ w=0$

  首先检查是否满足连续性

  $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}[a(x^2-y^2)]+\frac{\partial}{\partial y}(-2axy)=2ax+(-2ax)\equiv 0$$

  写出方程

  $$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=ax^2-ay^2 \tag{1}$$

  $$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-2axy \tag{2}$$

  对(1)积分，有 $\psi=ax^2y-\frac{ay^3}{3}+f(x)$

  对上式求导，有 $\frac{\partial\psi}{\partial x}=2axy+f'(x)=2axy$ 对比后，必然有 $f(x)=\text{constant}$

  流函数为 $\psi=a\left(x^2y-\frac{y^3}{3}\right)+C$

## 速度势

如果一个矢量的旋度为零，那么这个矢量可表达为一个标量的梯度

速度势函数性质：

- 只有在无旋流动下存在
- 对可压缩、非稳态流动也适用
- 对三维流动适用

对不可压缩流动，连续性方程为 $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$

因此 $\nabla^2\phi=0=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

势函数满足拉普拉斯方程

满足无旋流动的条件即可

速度势对某个方向进行微分，等于这个方向的速度分量（求解的方式）

求解速度速之前，先确认是无旋流动 $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(16-16) = 0$

引入速度势，有 $\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = 16y - x$

对$x$进行积分，有 $\phi = 16xy - \frac{x^2}{2} + f(y)$

### 流函数与势函数的性质

- 流函数
  - 二维稳态**不可压缩流动**，**有黏无黏都存在流函数**
  - 流函数满足连续性方程
  - 对无旋稳态不可压缩流动，流函数满足拉普拉斯方程
- 速度势
  - 只要流动**无旋**，就存在速度势
  - 速度势的梯度是速度
  - 对稳态不可压缩流动，**速度势和流函数正交**

# 伯努利方程

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 = \text{const}$$

使用的条件：（使用过的条件还是比较苛刻的）

1. 定常

2. 不可压缩
3. 无粘
4. 沿着一条流线

# 量纲分析

## 瑞利法

- 影响因素
- 其中的一个可以表示为其他的乘积的形式
- 由量纲分析的原理
- 分析求出系数
  适合比较简单的问题

实际上就是使等式左右的量纲齐次

$$F = f(m, v, R)$$
$$F = k m^{a_1} V^{a_2} R^{a_3}$$
$$\dim F = k\dim\left(m^{a_1} V^{a_2} R^{a_3}\right)$$
$$MLT^{-2} = M^{a_1}(LT^{-1})^{a_2}(L)^{a_3}$$

**根据量纲和谐原理，得到方程组**

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{L}: & 1 = a_2 + a_3 \\ \mathrm{T}: & -2 = -a_2 \\ \mathrm{M}: & 1 = a_1 \end{array}\right\} \quad 解得 \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

## 白金汉定理

选择含有所有的基本量纲的参数（等于基本量纲的数目）

将其余的参数使用这些参数进行表示（实际上就是选择基底进行表示）

# 不可压缩流体的内部流动

## 圆管中的层流

- 速度的分布
- 最大的速度
- 流量的大小
- 流速的分布
- 切应力
- 阻力系数

上述的这些对于Re<2300的圆管层流都成立

## 充分发展

在起始的部分，由于粘性的作用，会存在边界层，随着距离的发展，边界层不断加厚，之后，边界层重合，此时是充分发展的截断（之后的速度分布就不变了，二次曲线的形状）

有着从起始到达充分发展的长度L

## 圆管湍流运动

水头损失，沿程损失系数

管路的总的水头损失系数为沿程损失系数和局部损失系数的和

# 动量

液体受到的力为动量的变化量，收到的力矩为角动量的变化

- 受力来源为管道的力和出入口的力（入口和水的速度一样，出口相反，大小为压强乘以面积）

> 圆管中流动的临界雷诺数为2300（层流），大于4000时为湍流
>
> 在平板外部流动时的，临界的雷诺数为500000（一般取这个），可见、在平板外部绕流的层流的雷诺数较大

- 有如下的边界层厚度和雷诺数的计算公式：

$$\frac{\delta}{x} \approx \begin{cases} \frac{5.0}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} & \text{laminar} & 10^3 < \mathrm{Re}_x < 10^6 \\ \frac{0.16}{\mathrm{Re}_x^{1/7}} & \text{turbulent} & 10^6 < \mathrm{Re}_x \end{cases}$$

$$\mathrm{Re}_x = Ux/\nu$$

其中的x为某一位置到起始端的距离

> 所以在绕流的起始端是小雷诺数的层流，边界层的厚度比较小
>
> 之后充分发展，变为湍流、边界层厚度变大

# 学习建议