

过程工程流体力学复习

教材(听说过控要单独出一本书?)



工程流体力学(黄卫星等)(Z-Library).pdf
56.82MB



复习资料

1. PPT

- 第一章 流体的力学性质.pdf
- 第二章 流体流动的基本概念.pdf
- 第三章 流体静力学.pdf
- 第四章 流体流动的守恒原理.pdf
- 第五章 流体流动微分方程.pdf
- 第六章 流体流动模型实验方法.pdf

2. 教材答案(与书中答案对比参考, 各有对错)

<https://www.cc98.org/topic/5071847>



教材答案.zip
14.44MB



数学基础

1. 华里士公式

https://www.bilibili.com/video/BV1eF411V7ez?spm_id_from=333.788.recommend_more_video.1&vd_source=51187524e...

三步记住 任意区间点火公式——华里士公式_哔哩哔哩_bilibili

用图像法可以更好地记忆华里士相关公式, 视频中的例题主要是加深下理解。 , 视频播放量 108235、弹幕量 53、点赞数 2375、投硬币枚数 1397、收藏人数 3902、转发人数 639, 视频作者 泰成同学, 作者简介, 相关视频:两分钟记住点火公式~, 点火公式你...

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & , n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} & , n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (n > 1) \\ & \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad , n \text{ 为奇/偶数} \\ & \int_0^{\pi} \cos^n x \, dx = \begin{cases} 0 & , n \text{ 为奇数} \\ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx & , n \text{ 为偶数} \end{cases} \\ & \int_0^{2\pi} \sin^n x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x \, dx = \begin{cases} 0 & , n \text{ 为奇数} \\ 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx & , n \text{ 为偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

2. 一阶线性常微分方程

C. 一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

方法：通解公式

$$y = e^{-\int p(x) dx} \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx + ce^{-\int p(x) dx}$$

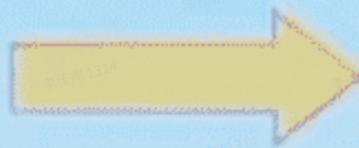
；另外，对于初值问题 ($y|_{x=x_0} = y_0$)，有

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi} \left[\int_{x_0}^x f(\zeta) e^{\int_{x_0}^{\zeta} p(\xi) d\xi} d\zeta + y_0 \right] .$$

专业课基础

1. 理想气体状态方程

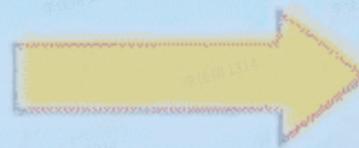
$$pv = R_g T$$

 v

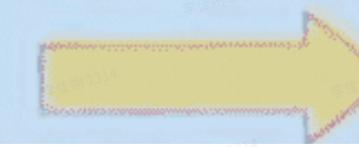
$$pV = mR_g T$$

 m

$$pV_m = RT$$

 V_m

$$pV = nRT$$

 n

2. 理想气体的多变过程

4-3 理气的多变过程

一、过程方程

$$pv^n = \text{const}$$

n 为多变指数

$n = 0 \rightarrow p = \text{const}$, 等压过程

$n = 1 \rightarrow pv = \text{const}$, 定温过程

$n = \kappa \rightarrow pv^\kappa = \text{const}$, 定熵过程

$n = \infty \rightarrow p^{\frac{1}{n}}v = \text{const}$, 定容过程

二、状态参数间的关系

$$pv^n = \text{const}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1}$$

$$K=C_p/C_v$$

数据与单位转换

1. 常用压力单位及换算关系

表 B-2 基本单位换算关系

单位	换算关系	备注
质量	$1 [\text{kg}] = 1000 [\text{g}] = 2.20462 [\text{lb}]$	g—克
长度	$1 [\text{m}] = 39.3701 [\text{in}] = 3.2808 [\text{ft}] = 1.0936 [\text{yd}]; 1 [\text{ft}] = 12 [\text{in}]; 1 [\text{in}] = 25.40 [\text{mm}]$	lb—磅
面积	$1 [\text{m}^2] = 10^4 [\text{cm}^2] = 10.764 [\text{ft}^2] = 1550 [\text{in}^2]$	in—英寸
体积	$1 [\text{m}^3] = 10^3 [\text{L}] = 35.31 [\text{ft}^3] = 219.98 [\text{gal (英)}] = 264.17 [\text{gal (美)}]$	ft—英尺
密度	$1 [\text{kg}/\text{m}^3] = 1000 [\text{g}/\text{cm}^3] = 6.2428 \times 10^{-2} [\text{lb}/\text{ft}^3]$	yd—码
力	$1 [\text{N}] = 10^5 [\text{dyne}] = 0.10197 [\text{kgf}] = 0.22488 [\text{lbf}]$	gal—加仑
压力	$1 [\text{Pa}] = 10^{-5} [\text{bar}] = 1.0197 \times 10^{-5} [\text{kg}/\text{cm}^2] = 14.5 \times 10^{-5} [\text{lbf}/\text{in}^2] = 7.5 \times 10^{-3} [\text{mmHg}] = 10.21 \times 10^{-2} [\text{mmH}_2\text{O}] = 29.53 \times 10^{-5} [\text{inHg}] = 0.9869 \times 10^{-5} [\text{标准大气压}]$	dyne—达因
黏度	$1 [\text{Pa} \cdot \text{s}] = 10^3 [\text{cp}] = 0.6721 [\text{lb}/(\text{ft} \cdot \text{s})] = 0.102 [\text{kgf} \cdot \text{s}/\text{m}^2] = 2.09 \times 10^{-2} [\text{lbf} \cdot \text{s}/\text{ft}^2]$	kgf—公斤力
能、功	$1 [\text{J}] = 0.2389 \times 10^{-3} [\text{kcal}] = 9.485 \times 10^{-4} [\text{BTU}] = 0.7378 [\text{lbf} \cdot \text{ft}]$	lbf—磅力
功率	$1 [\text{kW}] = 1000 [\text{W}] = 0.2389 [\text{kcal}/\text{s}] = 0.9485 [\text{BTU}/\text{s}] = 1.3410 [\text{hp}] = 737.79 [\text{ft} \cdot \text{lbf}/\text{s}]$	bar—巴
热容	$1 [\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})] = 0.2389 \times 10^{-3} [\text{kcal}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})] = 0.2389 \times 10^{-3} [\text{BTU}/(\text{lb} \cdot ^\circ\text{F})]$	cp—厘泊
导热系数	$1 [\text{J}/(\text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{K})] = 1 [\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})] = 0.860 [\text{kcal}/(\text{m} \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C})] = 0.5779 [\text{BTU}/(\text{ft} \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{F})]$	BTU—英热单位
温度	$t(^{\circ}\text{C}) = [t(^{\circ}\text{F}) - 32] \times 5/9; T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273$	hp—马力
		$^{\circ}\text{F}$ —华氏度

偶然发现的网站

<https://aeroengine.buaa.edu.cn/pub/tb/1BLbeDzzLkQ/>

流体力学云教材

知识图谱 树形图 拼音索引 关于 这是一个流体力学知识网页，内容将逐步添加并保持更新，点击具体节点可打开知识网页。(灰色表示尚未编辑的词条) 知识图谱形式的索引更适合于电脑端使用，树形图的索引更适合于手机端使用。手机端建议横屏观看。基本...

第一章 流体的力学性质

1. 流体区别于固体的力学性质

流体区别于固体的力学特性：

流动性、可压缩性、粘滞性、表面张力特性。

2. 体积压缩系数与体积弹性系数

体积压缩系数 β_p ：确定温度下，单位压力增量产生的体积压缩率，即

$$\beta_p = -\frac{dV/V}{dp} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

β_p 恒为正值，单位： m^2/N 或 $1/Pa$ 。显然， $\beta_p \nearrow$ ，可压缩性 \nearrow ，反之亦然。

体积弹性模数 E_V ：确定温度下，流体体积压缩率对应的压力增量，即

$$E_V = \frac{1}{\beta_p} = -V \frac{dp}{dV}$$

E_V 是 β_p 的倒数，单位： Pa 。显然， $E_V \nearrow$ ，可压缩性 \searrow ，反之亦然。

液体与气体的可压缩性：液体和气体的重要差别是可压缩性显著不同

液体： E_V 的数量级 $\sim 10^9 (Pa)$ ，可压缩性很小。视 E_V 为常数，则压缩率为

$$\frac{(V_1 - V_2)}{V_1} = 1 - \exp\left[-\frac{(p_2 - p_1)}{E_V}\right]$$

气体： E_V 与压缩热力过程有关， E_V 的数量级 $\sim 10^5 (Pa)$ ，可压缩性 \gg 液体。

以理想气体为例：其压缩过程中 p 与 V 的关系（即热力过程方程）为：

$$pV^n = const \quad \text{或} \quad npV^{n-1}dV + V^n dp = 0 \quad \text{或} \quad np = -V \frac{dp}{dV}$$

根据上述过程方程可得理想气体体积弹性模数为：

$$E_V = -\frac{dp}{dV/V} = np$$

积分可得压缩率为：

$$\frac{(V_1 - V_2)}{V_1} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/n}$$

3. 可压缩流体与不可压缩流体

所有流体都是可压缩的。对于压缩性较大的流体，考虑其压缩性影响是问题研究的特点。但对于压缩性极小的流体，可认为 $\rho = \text{const}$ ，即流体不可压缩；引入不可压缩流体假设可使问题的研究大为简化。具体问题中，流体(无论气体还是液体)是否可压缩，判断的依据主要是可压缩性对流动过程影响的大小，或者问题研究所要求的近似程度。

液体通常视为不可压缩流体，但研究水中爆炸和高压液压系统时，就必须考虑液体的可压缩性；

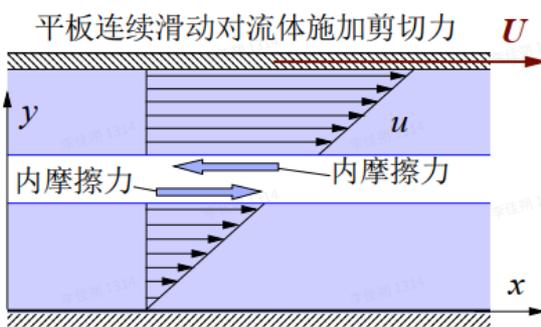
气体通常视为可压缩流体，但对于气速 $< 100\text{m/s}$ 的一般流动过程，若气体压力的变化幅度远小于其平均压力，由此导致的密度变化也相对较小，通常就可将气体近似为不可压缩流体来处理。

4. 流体粘滞力的机理：分子内聚力+分子动量交换

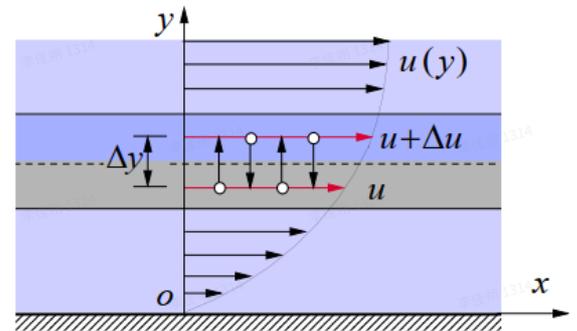
流体粘滞性的机理——分子内聚力 + 分子动量交换

分子内聚力机理：分子引力对流体层之间的相对运动产生抵抗行为

分子动量交换机理：分子热运动导致流体层间的动量交换产生内摩擦力



流体的内摩擦力



流体层间分子的动量传递

分子动量交换图示说明：考察假想平面上下两侧流体层，其速度分别为： $u + \Delta u$ ， u 。因分子热运动，两流体层间不断有分子交换且各自交换的分子总质量 m 统计平均相等；交换过程中上、下两层流体各自获得的 x 方向的动量分别为： $-m\Delta u$ 、 $m\Delta u$ ，由动量定律可知，上层必然受到与 x 方向相反的作用力，而下层流体必然受到与 x 方向相同的作用力；此作用力即流体内摩擦力。

5. 牛顿剪切定律

流体层之间单位面积的摩擦力与流体变形速率(速度梯度)成正比:

$$\tau = \mp \mu \frac{du}{dy} \begin{cases} - \text{传递过程: 动量通量} \propto \text{动量梯度} \\ + \text{流体力学: 剪切应力} \propto \text{速度梯度} \end{cases}$$

切应力 τ : 单位面积的内摩擦力, N/m^2 或 Pa

动力粘性系数 μ : 流体物性参数, 简称动力粘度, $\text{N}\cdot\text{s/m}^2$ 或 $\text{Pa}\cdot\text{s}$

应用条件: 牛顿剪切定律仅适用于一维层流:

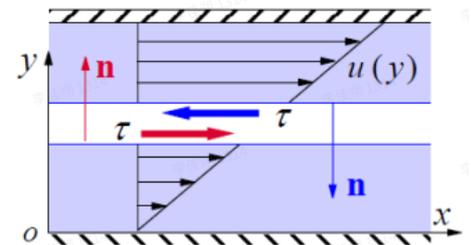
$$u = u(y) \rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad u = u(r) \rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dr}$$

τ 的正方向规定: 对于 $u = u(y)$, τ 作用在 $\perp y$ 的流体面上, 其正方向与作用面取向有关, 如图:

作用面 \mathbf{n} 与 y 同向, τ 指向 u 的正方向为正;

作用面 \mathbf{n} 与 y 反向, τ 指向 u 的反方向为正;

如此规定, 剪切公式中 τ 的正负将表示其实际方向, 与坐标取向无关。



剪切应力 τ 的方向规定

例如, 根据剪切公式: 若 $\tau > 0$, 则 τ 的实际方向与规定的正方向一致; 若 $\tau < 0$, 则 τ 的实际方向与规定的正方向相反。

应用 1: 关联流体应力与速度的物理方程: 相当于固体力学的**虎克定律**

应用 2: 已知速度分布 $u = f(y)$, 求导计算流体摩擦力(或流体阻力):

对于**薄膜摩擦流动**, 可假设液膜厚度 δ 内速度为线性分布, 因此

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{\Delta u}{\delta}$$

6. 流体粘度系数随压力温度的变化行为

压力的影响较弱, 通常可不予考虑; 温度对粘度 μ 的影响显著:

液体粘度: $T \nearrow$, $\mu \searrow$, 分子内聚力占优, 且随温度升高而减小;

气体粘度: $T \nearrow$, $\mu \nearrow$, 分子动量交换占优, 且随温度升高而加剧;

液体粘度通常高于气体粘度, 常温下水的 μ 比空气高 2 个数量级;

7. 运动粘度系数

运动粘度系数 ν ——流体动力粘度 μ 与密度 ρ 的组合物性参数：

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

ν 的基本单位为 m^2/s ，由于没有力的要素，故称其为运动粘度。

显然，对于可压缩性流体，其运动粘度 ν 与温度和压力均密切相关。

8. 无滑移条件

无滑移条件：流体与固体壁面之间不存在相对滑动，即固体壁面上的流体速度与固体壁面速度相同；特别地，在静止的固体壁面上，流体速度为零；这就是流体力学问题分析中广泛使用的**无滑移边界条件**。实践证明，除聚合流体等少数情况，无滑移边界条件在多数场合都是符合实际的。

9. 理想流体

理想流体：即粘度 $\mu=0$ 的流体，又称无粘流体。理想流体是一种假想的流体，因为真实流体都是有粘性的。但对于粘性力（比之于惯性力、流体压力等）相对较小的问题，或粘性力主要影响区以外的流动分析，引入理想流体假设，既能使问题的分析得到简化，同时也便于揭示出流体运动的主要特征。

10. 表面张力

表面张力：因气液界面两侧分子引力不平衡存在于液体表面的拉伸力。

11. 表面张力系数

表面张力系数：液面单位长度流体线上的表面张力；用 σ 表示，N/m。

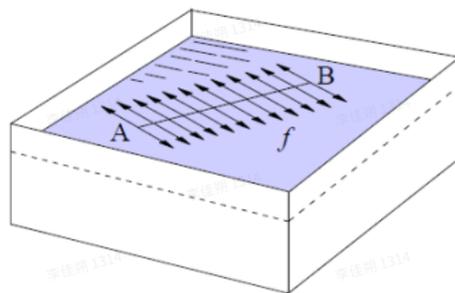
如图：液面流体线 A-B（长度为 l ）一侧受到的总的表面张力为：

$$f = \sigma l$$

σ 的**基本行为：**液体物性参数，与液面接触的流体种类有关，且随 T 升高而降低，但不显著；

比如：水从 $0^\circ\text{C} \rightarrow 100^\circ\text{C}$ ，其与空气接触的表面张力系数 $\sigma = 0.0756 \rightarrow 0.0589 \text{ N/m}$ 。

常见液体表面张力系数见**附录 C**。



液体表面张力概念

12. 拉普拉斯公式

拉普拉斯公式：

设液面两侧压力分别为 p_0 （凸出侧）和 p_i （凹陷侧），则静止液面所受法线方向的总力有如下平衡关系：

$$p_i dA - p_0 dA - \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dA = 0$$

由此得**弯曲液面附加压差——拉普拉斯公式：**

$$p_i - p_0 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

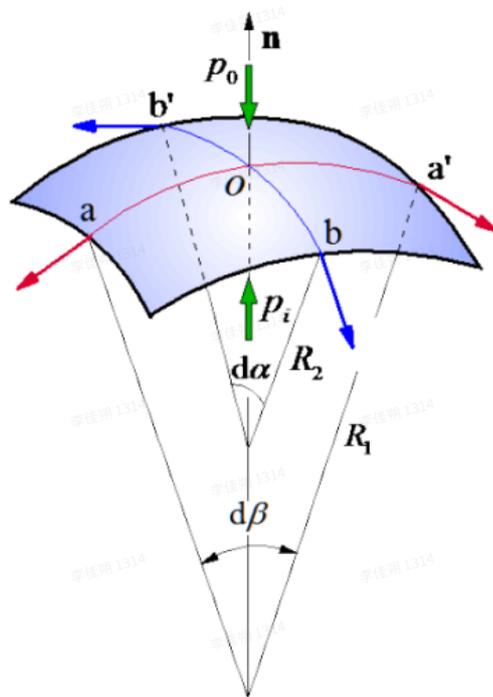
该式表明：

① 由于表面张力的存在，弯曲液面两侧会产生附加压力差，而且凹陷一侧的压力 p_i 总高于凸出一侧的压力 p_0 ；对于凹形液面，同样如此。

② 对于球形液面，因为 $R_1 = R_2 = R$ ，所以

$$p_i - p_0 = \frac{2\sigma}{R}$$

③ 对于平直液面， $R_1 = R_2 = \infty \rightarrow (p_i - p_0) = 0$ ，故无附加压差现象；



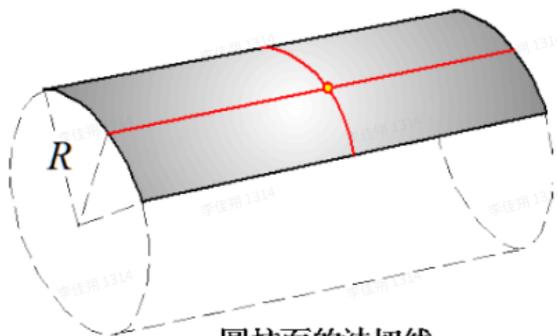
弯曲液面附加压差

正交法切线性质:

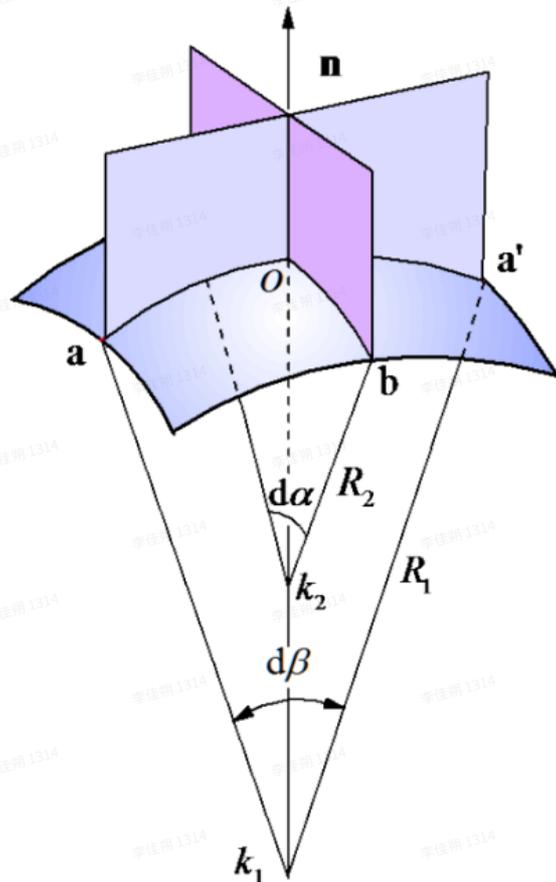
可以证明: 通过曲面上一点的任意一对正交法切线的曲率半径倒数之和($1/R_1+1/R_2$)都相等。所以实践中只要能找到其中一对正交法切线的曲率半径即可。

如: 对于圆柱面, 母线与圆周线就是一对正交法切线, 其中: $R_1 = \infty, R_2 = R$ 所以:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}, \quad p_i - p_o = \frac{\sigma}{R}$$



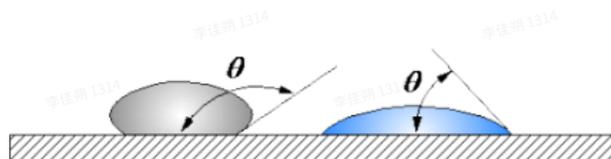
圆柱面的法切线



弯曲液面的法切线性质

13. 润湿效应

润湿效应: 液体接触固体壁面时的一种界面现象。润湿指液体接触固体壁面时四散扩张, 不润湿则指液体在固体壁面收缩团聚。润湿效应取决于表面张力~液固界面分子引力相对大小。



(a)玻璃管插入水中 (b)玻璃管插入水银中
液-固界面的接触角

💡 当液体表面张力占优时, 润湿效应减弱, 当液-固分子引力占优时, 润湿效应增强。

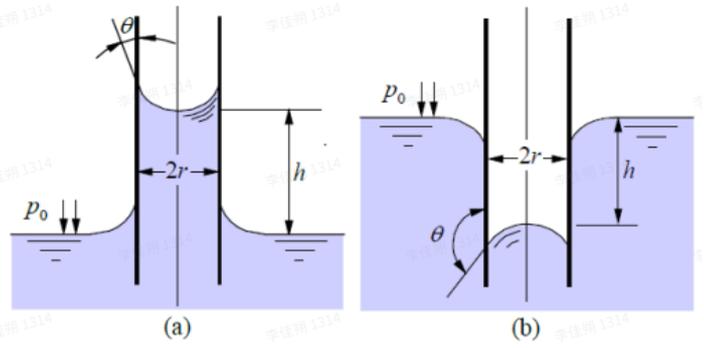
14. 润湿效应的表征

润湿效应的表征: 液-固界面接触角 θ 。润湿性好 θ 为锐角, 反之为钝角; 例如水和水银与洁净玻璃面接触, 其 θ 分别为 0° 和 140° , 故水能润湿洁净玻璃面, 水银则收缩成球形不能润湿玻璃面; 同一道理, 玻璃管中水的液位升高而水银的液位则低于管外液位。

15. 毛细现象与广义毛细管

毛细现象：液体表面张力及液-固润湿效应所确定的界面现象。如细玻璃管插入水或水银中，管内外液面出现明显高差，此即毛细现象。

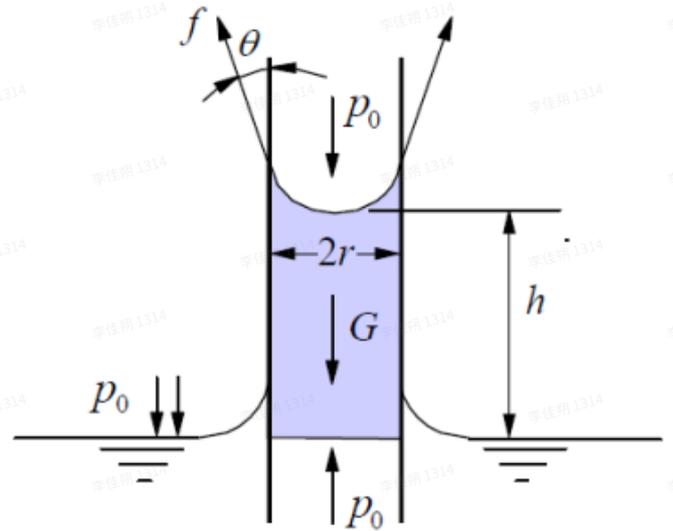
广义毛细管：凡产生毛细现象的固体壁面可通称毛细管。如狭窄缝隙、纤维及粉体物料构成的多孔介质。在血液流动、植物根茎营养输送、多孔介质流动等问题中需考虑毛细作用。



细玻璃管毛细现象

16. 毛细管内外的液面高差

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}$$



毛细升高液柱受力分析

①对于 θ 为钝角的情况， h 为负值，表明管内液面低于管外液面；

②因忽略了弯月面中心以上部份液体重力，由上式计算的 h 值略高于实际值，且这种差别随 r 增加而增大；

③当管直径大于12mm时毛细效应可忽略不计。

④公式中 h 、 ρ 、 θ 、 r 都是可测参数，故可用作 σ 的测试原理式；

17. 牛顿流体与非牛顿流体

牛顿流体：切应力 τ 与速度梯度 du/dy 满足牛顿剪切定律的流体。

牛顿流体的 $\tau \sim du/dy$ 关系为线性关系，即

$$\tau = \mu(du/dy)$$

其中的粘度 μ 是物性参数，与速度梯度无关。

——气体和低分子量液体及其溶液，包括空气和水都属于牛顿流体。

非牛顿流体：即 $\tau \sim du/dy$ 关系不满足牛顿剪切定律的流体。切应力 τ 与速度梯度 du/dy 表现出非线性关系的流体。

非牛顿流体的 τ 也可表示为 du/dy 的单值函数，即

$$\tau = f(du/dy)$$

但 $\tau \sim du/dy$ 关系是非线性的。

——聚合物溶液、熔融液、料浆液、悬浮液、以及一些生物流体如血液、微生物发酵液等均属于非牛顿流体。

18. 非牛顿流体的类别

非牛顿流体的黏度特性：

胀塑性流体：其 $\tau \sim du/dy$ 曲线斜率随 du/dy 增加而增大(du/dy 增加提高其粘性)，故又称**剪切增稠流体**。如：淀粉、硅酸钾、阿拉伯树胶的悬浮液等。

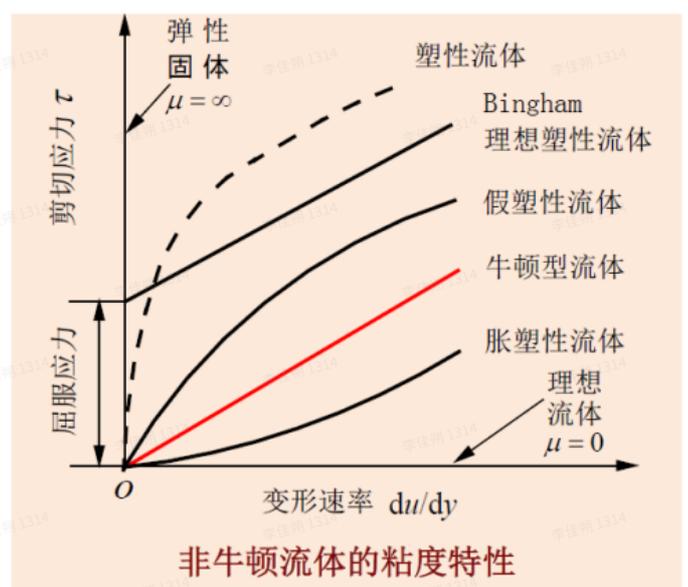
假塑性流体：其 $\tau \sim du/dy$ 曲线斜率随 du/dy 增加而减小(du/dy 增加降低其粘性)，故又称**剪切变稀流体**。如：聚合物溶液、涂料/泥浆悬浮液等。

胀塑性流体、假塑性流体、牛顿流体通称为**真实流体**：其 $\tau \sim du/dy$ 曲线都通过原点，即：一当受到剪切应力作用就会流动($du/dy \neq 0$)，不能象固体那样以确定的变形抵抗剪切应力作用。

塑性流体/宾汉理想塑性流体：能抵抗一定剪切应力 τ_0 。 $\tau \leq \tau_0$ 时无流动， $\tau > \tau_0$ 时 $\tau \sim du/dy$ 为线性关系，即

$$\tau = \tau_0 + \mu_0 \frac{du}{dy} \quad (\tau \leq \tau_0 : \frac{du}{dy} = 0)$$

这类流体半似固体半似流体。如：钻井泥浆、污水泥浆、某些颗粒悬浮液等。



更复杂的非牛顿流体——依时性流体

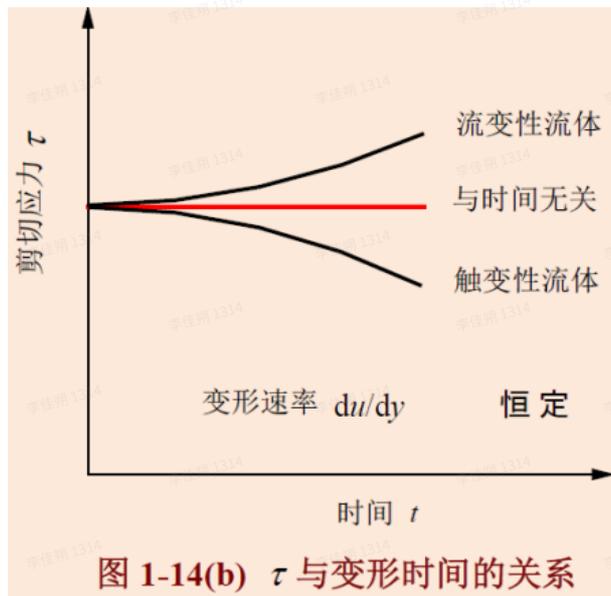
其 $\tau \sim du/dy$ 关系不仅非线性，而且还与时间有关，即

$$\tau = f[(du/dy), t]$$

则意味着 du/dy 保持恒定时，剪切应力 τ 还随时间 t 变化，见图。

—— τ 随时间 t 增加而增加的流体称为流变性流体，如石膏水溶液；

—— τ 随时间 t 增加而减小的流体称为触变性流体，如油漆。



19. 广义牛顿剪切应力公式与粘度函数模型

广义牛顿剪切应力公式：描述非牛顿流体粘度特性的 $\tau \sim du/dy$ 关系式：

$$\tau = \eta(du/dy)$$

式中， η 是反映流体内摩擦特性的粘度函数，称为广义牛顿粘度。对牛顿流体： $\eta = \mu$ ，属流体物性参数；对非牛顿流体： $\eta = f(\text{流体物性}, \tau, du/dy)$ 。

粘度函数模型：非牛顿流体粘度函数 η 的指数模型：

$$\eta = \eta_R \left| (du/dy)_R \right|^{n-1}$$

式中， $(du/dy)_R$ 称为相对剪切速率，无量纲； η_R 称为稠度系数(Pa·s)。其中：

- ① $n=1$ ， $\eta = \eta_R = \mu$ ，为牛顿流体；
- ② $n < 1$ ，为假塑性流体(或剪切变稀流体)；
- ③ $n > 1$ ，为胀塑性流体(或剪切增稠流体)。

例题1-1 1-2 1-3及拓展应用 1-4 1-5 见PPT与书本

作业 1-1 1-2 1-5 1-8 1-13 1-14

第一章 做题心得

- 1-2题 过程保留4位有效数字，结果保留2位有效数字
- 1-8题 力矩 $M=R \times F$ ，不要忘记 R
- 1-13题，棉线弯曲不能直接用 $f = \sigma l$ ，应当取微元后积分

H-13 $F = 6D$


$$dF = G dl = GR d\theta$$
$$dF_y = GR \sin \theta d\theta$$
$$F_y = GR \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -GR \cos \theta \Big|_0^\pi = 2GR = 6D$$

故 $T = \frac{1}{2} F_y = \frac{1}{2} 6D = 7.3 \times 10^{-4} N$

第二章 流体流动的基本概念

1. 流动分类

流动分类：根据着眼点的不同，流体流动的分类有多种方式。

根据流动的**时间变化特性**：稳态流动、非稳态流动；

根据流动的**空间变化特性**：一维、二维、三维流动；

根据流动的**内部流动结构**：层流流动、湍流流动；

根据流动中**流体密度变化**：可压缩流体流动、不可压缩流体流动；

2. 流动的时间特性分类：稳态流动与非稳态流动

稳态流动：流场内流动参数不随时间变化的流动；

非稳态流动：流场内流动参数随时间变化的流动。

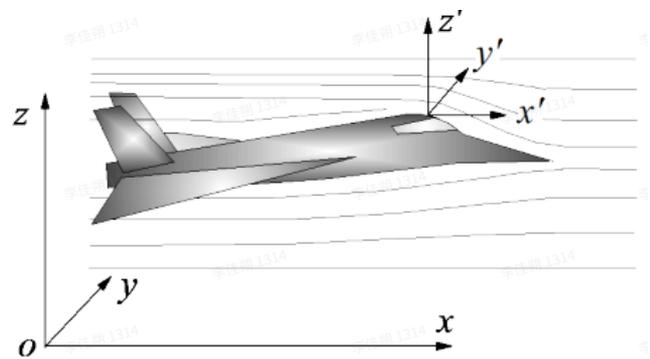
稳态与非稳态流场内的速度分布表达为

$$\text{稳态流动: } \begin{cases} v_x = v_x(x, y, z) \\ v_y = v_y(x, y, z) \\ v_z = v_z(x, y, z) \end{cases} \quad \text{非稳态流动: } \begin{cases} v_x = v_x(x, y, z, t) \\ v_y = v_y(x, y, z, t) \\ v_z = v_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

①稳态流动时，温度场、浓度场并不一定稳态，对于任意物理量 ϕ ，稳态条件为：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

②流体流动的稳态或非稳态有时与所选定的参考系有关。



坐标选择与流动的时间变化特性

3. 稳态流动的判别条件

稳态流动的判别条件： $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ 或 $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$

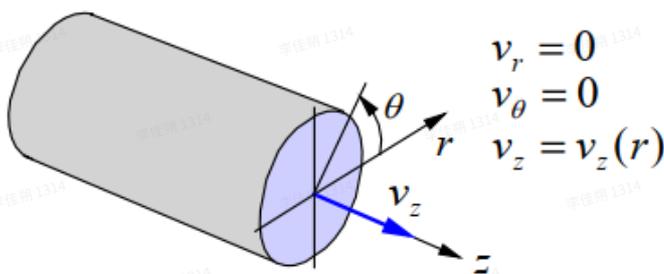
4. 流动的空间特性分类：一维流动，二维流动与三维流动

一维流动：流体速度只与一个坐标自变量有关的流动；

例如： $u = u(y)$, $u = u(r)$

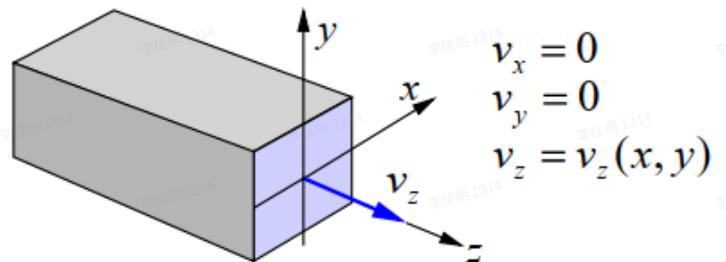
二位或三维流动：与两个或三个坐标自变量有关的流动；

需要指出：流动的维数与流体速度的分量数不是一回事。



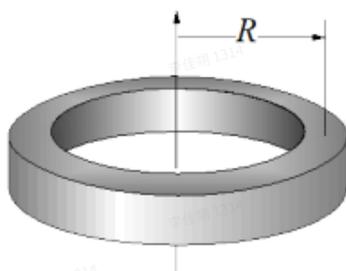
(a) 一维流动

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= 0 \\ v_z &= v_z(r) \end{aligned}$$

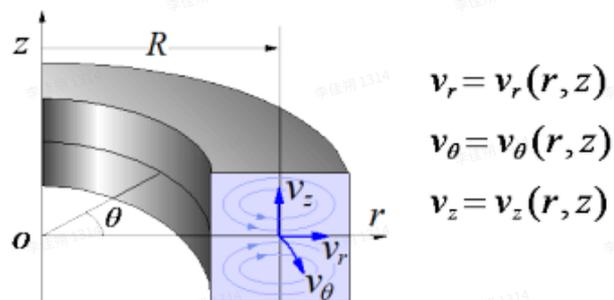


(b) 二维流动

$$\begin{aligned} v_x &= 0 \\ v_y &= 0 \\ v_z &= v_z(x, y) \end{aligned}$$



(c) 封闭环形管道内的流动-二维流动



$$\begin{aligned} v_r &= v_r(r, z) \\ v_\theta &= v_\theta(r, z) \\ v_z &= v_z(r, z) \end{aligned}$$

圆管、矩形管、环形管内的流动

5. 流动的可压缩性分类：不可压缩流动与可压缩流动

不可压缩流动：流动过程中流体密度可视为不变 ($\rho = const$) 的流动；

液体的流动：通常视为不可压缩流动，但水爆、液压系统等除外；

空气的流动： $Ma < 0.3$ 且压力变化较小的流动过程可按不可压缩流动处理；

可压缩流动：必须考虑密度变化的流动；

例如：高速管流，膨胀压缩过程，燃烧爆炸过程，高速飞行器问题等；

2. 拉格朗日法

跟踪流体质点运动，首先需要对流体质点进行标记并确定其运动轨迹。

质点标记：对于 t_0 时刻位于流场空间点 (x_0, y_0, z_0) 的流体质点，可令 $a=x_0, b=y_0, c=z_0$ 对其进行标记。 (a, b, c) 称为拉格朗日变量，是质点身份标记。

显然，不同的质点有不同的一组 (a, b, c) 值。

迹线方程：流体质点随后 t 时刻的位置 (x, y, z) 可由质点迹线方程确定：

$$x=x(a, b, c, t), \quad y=y(a, b, c, t), \quad z=z(a, b, c, t)$$

或：
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$$

质点速度：
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \mathbf{v}(a, b, c, t)$$

或：
$$\frac{dx}{dt} = v_x(a, b, c, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(a, b, c, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(a, b, c, t)$$

用拉格朗日方法，流体任意物理量 ϕ (无论矢量或标量) 可一般表示为：

$$\phi = \phi(a, b, c, t)$$

3. 欧拉法

欧拉法考察流场空间点上的流体流动,故流体运动参数或物理量直接表示为空间坐标 (x,y,z) 和时间 t 的函数,其中:坐标变量 (x,y,z) 称为欧拉变量。

欧拉速度表达式:按欧拉法,流场空间点 (x,y,z) 处的流体速度表示为:

$$\begin{cases} v_x = v_x(x, y, z, t) \\ v_y = v_y(x, y, z, t) \\ v_z = v_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

或

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$$

在欧拉法中,流体运动参数或物理量 ϕ (无论矢量或标量)可一般表示为:

$$\phi = \phi(x, y, z, t)$$

迹线微分方程:由欧拉速度表达式,可建立关于轨迹位置的微分方程:

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t)$$

工程实际流动问题研究中通常采用的是欧拉法,因为工程实际问题中,通常感兴的是确切位置处的流动情况,或设备空间内相关区域的流动情况。

4. 两种方法的变换

拉格朗日法表达式和欧拉法表达式可以相互转换。两种方法之间的转换就是拉格朗日变量 (a, b, c) 和欧拉变量 (x, y, z) 之间的数学变换。

①从拉格朗日表达式变换为欧拉表达式: $\phi = \phi(a, b, c, t) \rightarrow \phi = \phi(x, y, z, t)$

着手点是质点迹线方程:

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t)$$

由此解出: $a = a(x, y, z, t), \quad b = b(x, y, z, t), \quad c = c(x, y, z, t)$

将其代入 $\phi = \phi(a, b, c, t)$,即可得到物理量 ϕ 的欧拉表达式: $\phi = \phi(x, y, z, t)$ 。

②从欧拉表达式变换为拉格朗日表达式: $\phi = \phi(x, y, z, t) \rightarrow \phi = \phi(a, b, c, t)$

着手点是迹线微分方程:

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t)$$

由此解出欧拉变量 (x, y, z) ,即含积分常数的迹线方程:

$$x = x(c_1, c_2, c_3, t), \quad y = y(c_1, c_2, c_3, t), \quad z = z(c_1, c_2, c_3, t)$$

再由 $t = t_0$ 时 $a = x_0, b = y_0, c = z_0$ 确定 c_1, c_2, c_3 ,可得 (a, b, c) 表示的迹线方程:

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t)$$

将其代入 $\phi = \phi(x, y, z, t)$,即可得到 ϕ 的拉格朗日表达式: $\phi = \phi(a, b, c, t)$ 。

5. 质点导数

流体质点物理量对于时间的变化率称为该物理量的质点导数。

①以拉格朗日变量表示的物理量的质点导数

在拉格朗日法中，物理量 $\phi = \phi(a, b, c, t)$ 表示的就是流体质点 (a, b, c) 的物理量，所以其质点导数就等于该物理量 ϕ 对时间 t 的偏导数，即：

$$\frac{\partial \phi(a, b, c, t)}{\partial t}$$

例如，速度的质点导数（即加速度）为：

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = a_x(a, b, c, t), \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = a_y(a, b, c, t), \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = a_z(a, b, c, t)$$

或

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \mathbf{a}(a, b, c, t)$$

②以欧拉变量表示的物理量的质点导数

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{(\phi_P' - \phi_P)}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

欧拉物理量 ϕ 的质点导数的意义：

$$\frac{D\phi}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}} + \underbrace{v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \phi}{\partial z}}$$

物理量 ϕ 随时间的变化率，表征流场各点 ϕ 的非稳态性，又称局部变化率

物理量 ϕ 随空间的变化率，表征流场中 ϕ 的不均匀性，又称对流变化率

欧拉法速度的质点导数——质点加速度： $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

其中 ∇ 为 Hamilton 算子：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

(矢量微分算子)

柱坐标和球坐标的质点导数算子：对于柱坐标 $(r-\theta-z)$ 和球坐标 $(r-\theta-\varphi)$ ，欧拉变量质点导数算子为：

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$



注：此处质点导数公式的第四个加数： $v_z \frac{\partial v}{\partial z}$ 应为 $v_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$ 。

6. 判定流场稳态(欧拉物理量的时间偏导数=0)

欧拉物理量 ϕ 的时间偏导数的意义: 欧拉物理量 $\phi = \phi(x, y, z, t)$ 是流场空间点 (x, y, z) 处的物理量, 因此

$$\frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial t}$$

只表示 ϕ 在空间点 (x, y, z) 随时间的变化率, 该点不同时刻有不同的质点经过, 所以 $\partial \phi / \partial t$ 不代表同一质点物理量的时间变化率, 故不是 ϕ 的质点导数。

欧拉物理量 ϕ 的时间偏导数的应用: 因 $\partial \phi(x, y, z, t) / \partial t$ 表示空间点 (x, y, z) 处物理量 ϕ 随时间的变化, 故可用来判定流场是否稳态, 即如果流场稳态, 则

$$\frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial t} = 0$$

7. 迹线

流体质点的运动轨迹曲线称为迹线。

① 在拉格朗日法中, 质点的迹线方程就是质点坐标时间参数方程:

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t)$$

② 欧拉法中, 可由速度分量建立迹线微分方程:

$$dx/dt = v_x(x, y, z, t), \quad dy/dt = v_y(x, y, z, t), \quad dz/dt = v_z(x, y, z, t)$$

③ 亦可从迹线参数方程中消去 t , 得到 $z = f(x, y)$ 表示的质点迹线方程。

8. 流线

流线的定义: 流场中流体质点构成的流体线, 线上各点的速度方向都与该点的切线方向一致。

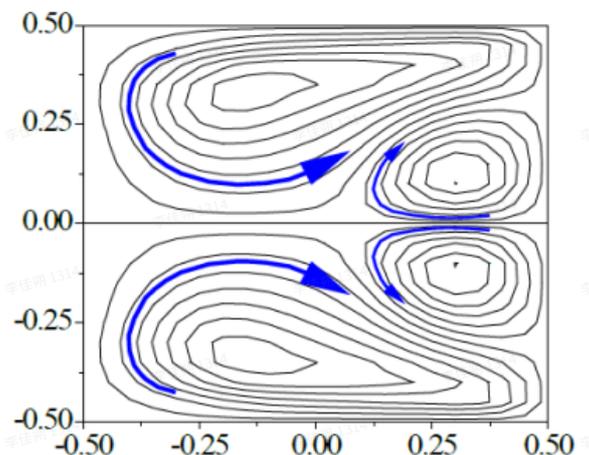
流线的性质:

① 除速度 = 0 或 ∞ 的奇点外, 经过任一空间点只有一条流线, 即流线不能相交。

② 流场中每一点都有流线通过, 所有流线形成流线谱。

③ 流线的形状和位置可随时间变化, 但稳态流动时其形状和位置是确定的。

流线的应用: ① 稳态条件下的流线谱可直观反映流动情况 (尤其是二维流动时, 如图); ② 流线的疏密程度可反映流动速度的大小, 流线密集处流速高于稀疏处。



弯曲管道中的二次流流线
(雷诺数 $Re=1210$, 弯曲比 $K=20$)

9. 流线与迹线的区别与联系

流线与迹线的区别：流线是同一时刻不同质点构成的一条流体线，迹线则是同一质点不同时刻所经过的空间点构成的曲线。但稳态条件下，流线与迹线重合。

10. 流线微分方程

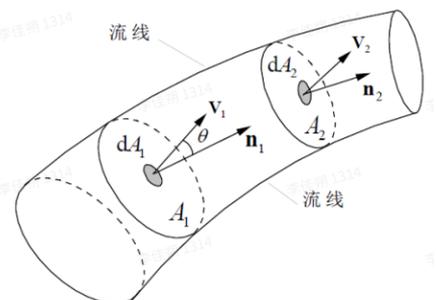
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

方程应用说明：由于流线是针对同一时刻而言，所以流线微分方程积分时，时间 t 是常量，所得流线方程中包含时间 t 表示不同时刻有不同的流线。

11. 流管的定义与性质

流管的定义与性质：流线构成的管状曲面称为流管。

- ① 流管表面不可能有流体穿过；
- ② 稳态流动时流管形状是确定的；
- ③ 工程实际中的管道是流管的特例。



流管及其内部流动

12. 流管内的质量流量

通过流管截面 A_1 的总质量流量则为

$$q_{m1} = \iint_{A_1} dq_{m1} = \iint_{A_1} \rho_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA_1$$

此即流体流过任意曲面 A_1 的质量流量的一般表达式。

 质量流量是指单位时间里流体通过封闭管道或敞开槽有效截面的流体质量。单位： $\text{kg/h}, \text{kg/s}$ 。和体积流量（单位时间流体通过的体积）对应，可以表示为体积流量和流体密度的乘积。（From 百度百科）

13. 稳态管流的连续性方程

稳态管流的连续性方程：若在流管上再作一截面 A_2 ，则 A_1 、 A_2 和流管表面构成封闭曲面；稳态条件下，封闭曲面内流体质量不变化，流管表面又没有流体穿过，所以通过 A_1 和 A_2 的质量流量必然相等，即

$$\iint_{A_1} \rho_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA_1 = \iint_{A_2} \rho_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA_2 \quad \text{或} \quad q_{m1} = q_{m2}$$

此即稳态管流连续性方程。该方程表明：流管截面不能收缩到零，否则流速将达到无穷大；流管只能始于或终于流场边界（如自由面或进出口），或者成环形。

14. 实际管道流动的连续性方程

实际管道流动的连续性方程：用 ρ_m 、 v_m 分别表示平均密度和速度，则

$$A_1 \rho_{1m} v_{1m} = A_2 \rho_{2m} v_{2m}$$

如果 $\rho = \text{const}$ ，则有

$$A_1 v_{1m} = A_2 v_{2m}$$

对于充满不可压缩流体的刚性管道，上式对非稳态流动也是成立的。此外，根据 $q_m = A \rho_m v_m$ 可得管道截面流体平均速度定义式为

$$v_m = \frac{q_m}{A \rho_m} = \frac{1}{A \rho_m} \iint_A \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

15. 微元流体线的线变形速率

对三维流场， x 、 y 、 z 方向微元流体线的线变形速率分别为：

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

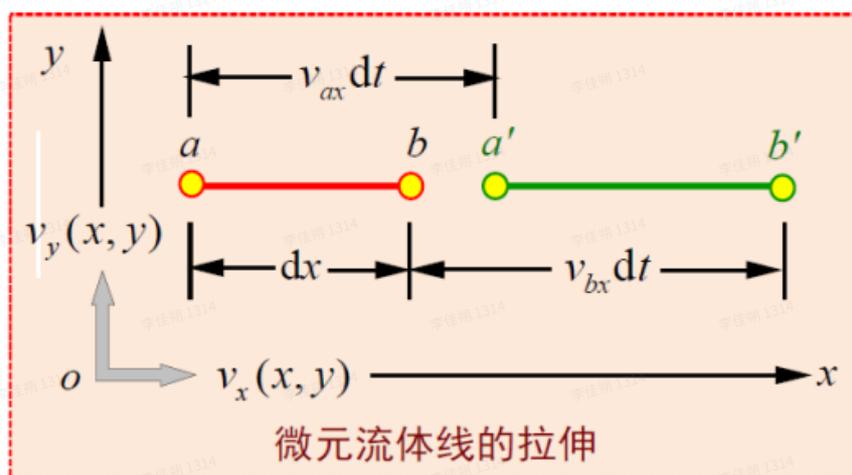
速度沿自身方向坐标偏导数的意义：

数学上， $(\partial v_x / \partial x)$ 表示 v_x 沿 x 方向的变化率

物理上， $(\partial v_x / \partial x)$ 表示微元流体线 dx 的拉伸变形速率。

推论： v_x 沿 x 方向加速，则 $(\partial v_x / \partial x) > 0$ ，流体线必然受到拉伸；

v_x 沿 x 方向减速，则 $(\partial v_x / \partial x) < 0$ ，流体线必然受到压缩。



16. 微元流体线的转动速率(逆时针为正)

同理：针对一般三维流场，任意线段 $d\mathbf{l} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ 在 x - y 、 y - z 、 z - x 平面内转动的角速度分别为：

$$\eta_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \eta_{yx} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (\text{x-y 平面内 } dx, dy \text{ 绕 } z \text{ 轴转动的角速度})$$

$$\eta_{yz} = \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \eta_{zy} = -\frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (\text{y-z 平面内 } dy, dz \text{ 绕 } x \text{ 轴转动的角速度})$$

$$\eta_{zx} = \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \eta_{xz} = -\frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (\text{z-x 平面内 } dz, dx \text{ 绕 } y \text{ 轴转动的角速度})$$

转动角速度 η 的下标意义:

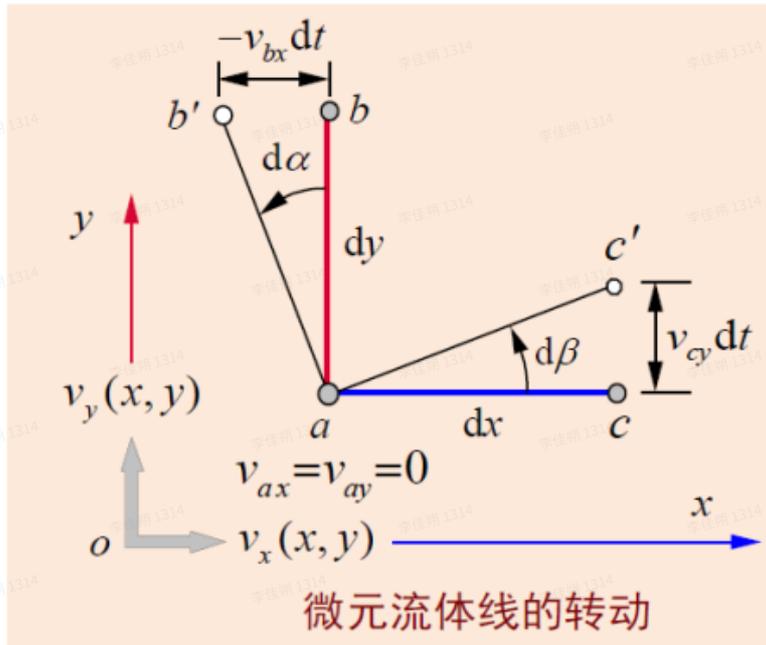
①两个下标表示转动所在平面, 其中, 第一个下标表示转动线段方位, 第二个下标表示导致转动的速度分量;

②下标排序为 x-y-z 反循环顺序的表达式带负号。

速度沿其它方向的偏导数的意义:

数学上, $(\partial v_x / \partial y)$ 表示速度 v_x 沿坐标 y 的变化率;

物理上, $(\partial v_x / \partial y)$ 表示线段 dy 在 x-y 平面内 (绕 z 轴) 转动的角速度。



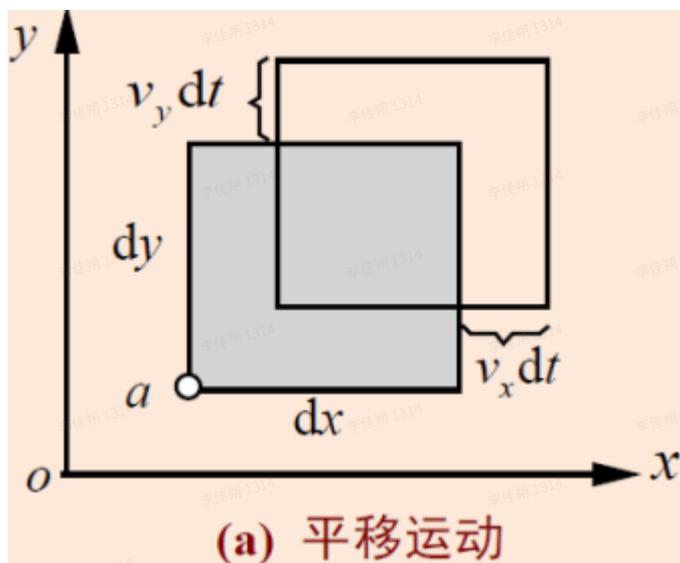
17. 微元流体团的基本变形

微元流体团基本变形: 平移、转动、剪切变形、体积膨胀(体变形)

1. 微元流体团的平移运动

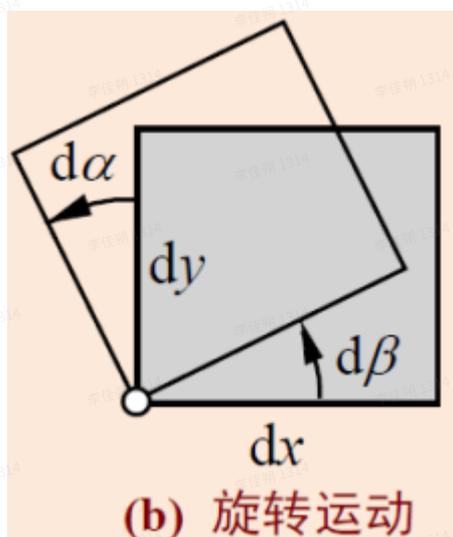
平移运动: x 、 y 、 z 方向平移运动速率分别为

$$v_x, v_y, v_z$$



2. 微元流体团的旋转运动

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$



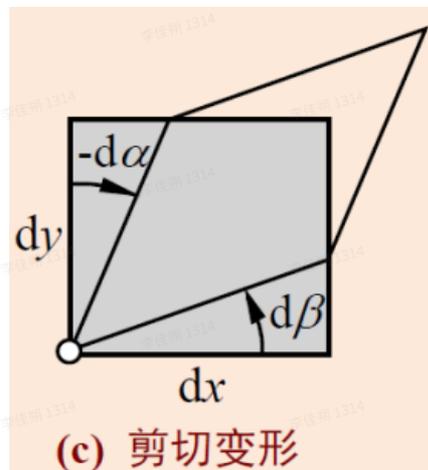
矢量形式: $\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \quad \text{速度场的旋度}$$

💡 旋转角速度是速度场的旋度的一半。

3. 微元流体团的剪切变形

剪切变形：变形速率定义为 dx 逆时针转动的角速度与 dy 顺时针转动的角速度的平均值。故 x - y 、 y - z 、 z - x 平面的剪切变形速率分别为：



$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

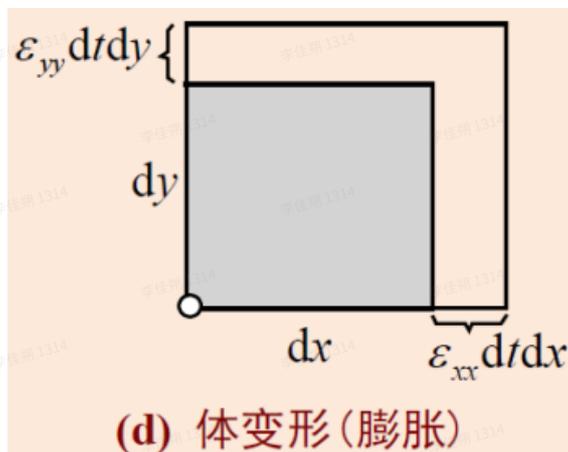
4. 微元流体团的膨胀变形(判断不可压缩流动：体积膨胀率=0)

膨胀变形：微元流体的体积膨胀速率定义为单位时间的体积膨胀率： $\dot{V} = [\Delta(dV)/dV]/dt$ ，即

$$\dot{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

特别地，对于不可压缩流体：微元流体团可以变形，但体积不变，所以必有

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$



其中，
$$\dot{V} = \frac{\Delta(dV)}{dV dt} = \frac{(dx + \varepsilon_{xx} dx dt)(dy + \varepsilon_{yy} dy dt)(dz + \varepsilon_{zz} dz dt) - dx dy dz}{dx dy dz dt} \approx \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

20. 有旋流动与无旋流动

有旋与无旋流动的定义：流体质点在随流体总体流动过程中，其轨迹可能是直线也可能是曲线，但在其沿轨迹线运动的过程中若自身还要旋转，则这样的流动称为有旋流动。若流体质点运动过程中自身不旋转（平动），则这样的流动称为无旋流动。

由此可见，有旋或无旋针对的是流体质点（微团）自身是否转动而言的，与其流动轨迹曲线的形状无关。

有旋与无旋流动的判别：流场中的流动是有旋流动还是无旋流动，可用流体微团角速度 ω 来判定： $\omega \neq 0$ 为有旋流动， $\omega = 0$ 则为无旋流动。因此，若已知流场速度分布，则对于无旋流动有

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = 0, \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0$$

反之，若其中任一角速度分量不为零，则为有旋流动

21. 流体流动的推动力

①**重力流动**：流体因重力作用产生的流动；**特点**：多存在自由液面。

——河床水渠流动、降膜流动、锅炉水自然循环、塔设备流动等；

②**压差流动**：流场压力差做功所产生的流动；

——常见管道流体输送和换热设备内部的流动通常属于压差流动；

——获得压差的方式：流体输送机械轴功转换，热能或化学能转化(燃烧、爆炸)产生高压气流，射流或冷凝形成负压等。

③**机械推挤或摩擦流动**：运动固体表面法向推挤和切向摩擦对流体做功、使流体获得动能与压力能所产生的流动；

——压缩机活塞往复运动、离心泵叶轮转动、搅拌桨/螺旋桨/电风扇转动所产生的流体流动，其原理基本如此；

——纯粹由剪切摩擦使流体产生的流动称为**摩擦流动**或**剪切流动**，特点是沿流动方向无压力梯度。如：强制涡运动、密封端面或轴承液膜运动。

④**其它力学因素产生的流动**：表面张力、电场力、离心力等产生的流动；

——多孔介质/纤维材料中的液体运输，热管工质沿输液芯或管壁沟槽的回流，电磁力驱动的环形封闭管内流动，离心过滤机滤饼层的流动等。

22. 层流与湍流

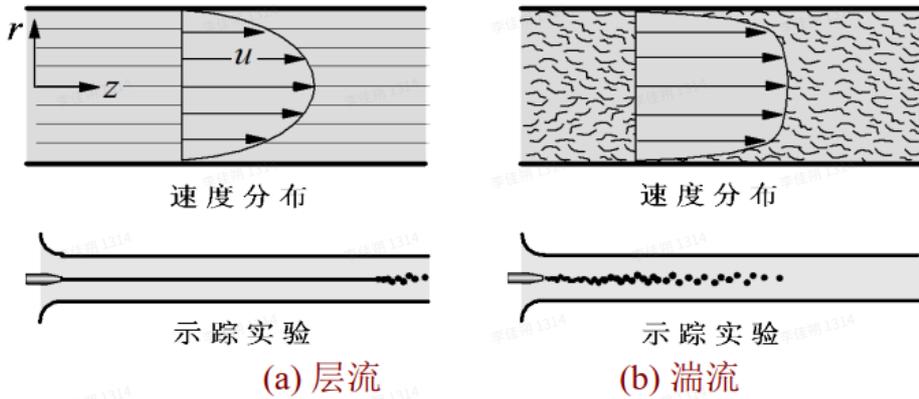
1. 层流与湍流的结构——雷诺实验

层流与湍流的特点——以圆管流动为例

①流场结构——雷诺实验

层流：流体层间犹如平行滑动的流动。横向只有分子热运动，且**热运动尺度** \ll **流体质点尺度**，故质点运动轨迹规则平稳，图(a)；

湍流：流场内部充满不同尺度涡旋的流动。横向有流体微团随机脉动，且**脉动尺度** \gg **流体质点尺度**，故流体质点相互掺混、运动紊乱不规则，图(b)；



圆管内的层流与湍流（雷诺实验，Osborne Reynolds, 1883）

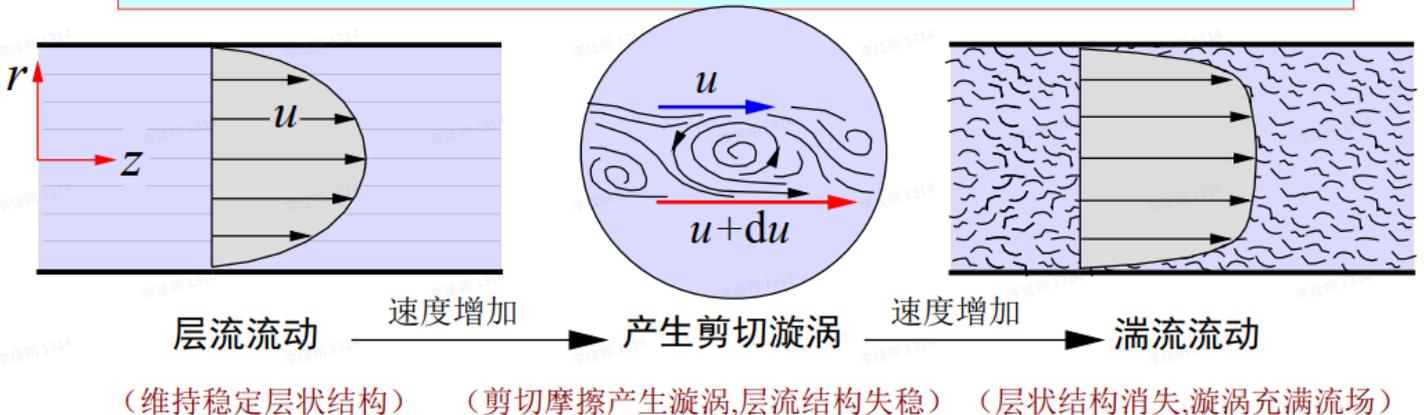
34

2. 层流到湍流的过渡（雷诺数）

②层流到湍流的过渡：流动失稳过程，速度量变到行为质变的过程

圆管中层流到湍流的过渡主要与 μ, ρ, u_m, D 有关，同时受进口扰动、管口形状及管壁粗糙度等因素影响。 μ, ρ, u_m, D 的综合影响可用**雷诺数** Re 表征：

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} \rightarrow \begin{cases} Re < 2300, \text{层流 (Laminar Flow)} \\ Re > 4000, \text{湍流 (Turbulent Flow)} \\ 2300 < Re < 4000, \text{过渡区 (Transition Regime)} \end{cases}$$



层流到湍流的过渡

3. 层流与湍流的速度分布

层流：速度分布呈抛物线形

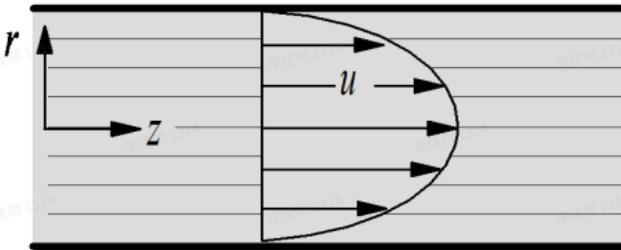
$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad u_{\max} = 2u_m \quad (\text{Re} < 2300)$$

湍流：速度分布呈圆台形

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}, \quad u_{\max} \approx 1.25u_m \quad (10^4 < \text{Re} < 10^5)$$

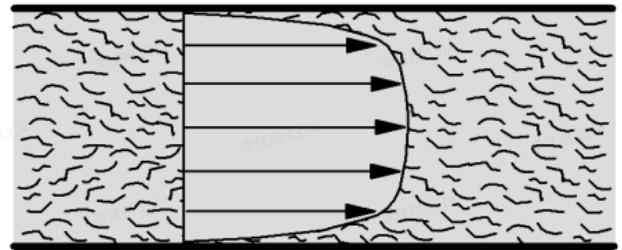
壁面区速度梯度增大 → 壁面切应力显著增加 → 流体阻力增加；

中心区湍流脉动强烈 → 动量横向传递（湍流扩散）增加 → 传热传质增强；



速度分布

(a) 层流



速度分布

(b) 湍流

4. 层流与湍流的动量传递特征

层流：流体层间的横向动量扩散仅由分子热运动产生；

层流剪切应力 τ 服从牛顿剪切定律，即

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} \quad \text{粘性系数 } \mu \text{ 是物性参数}$$

湍流：流体动量扩散除分子热运动外，主要贡献是流体微团随机脉动；

湍流切应力 τ 亦可仿照层流情况表示为

$$\tau = (\mu + \mu_T) \frac{d\bar{u}}{dr} = \tau_\mu + \tau_T \quad \text{其中 } \tau_T \gg \tau_\mu$$

湍流粘性系数 μ_T ：不再是物性参数，而是与湍流涡产生的流体微团脉动特性有关动力学参数。一般而言 $\mu_T = \mu_T(\mathbf{v}, x, y, z, t)$ ，且行为复杂；

比之于层流，湍流动量传递速率大为增强，流动阻力及传热传质速率亦显著增加。

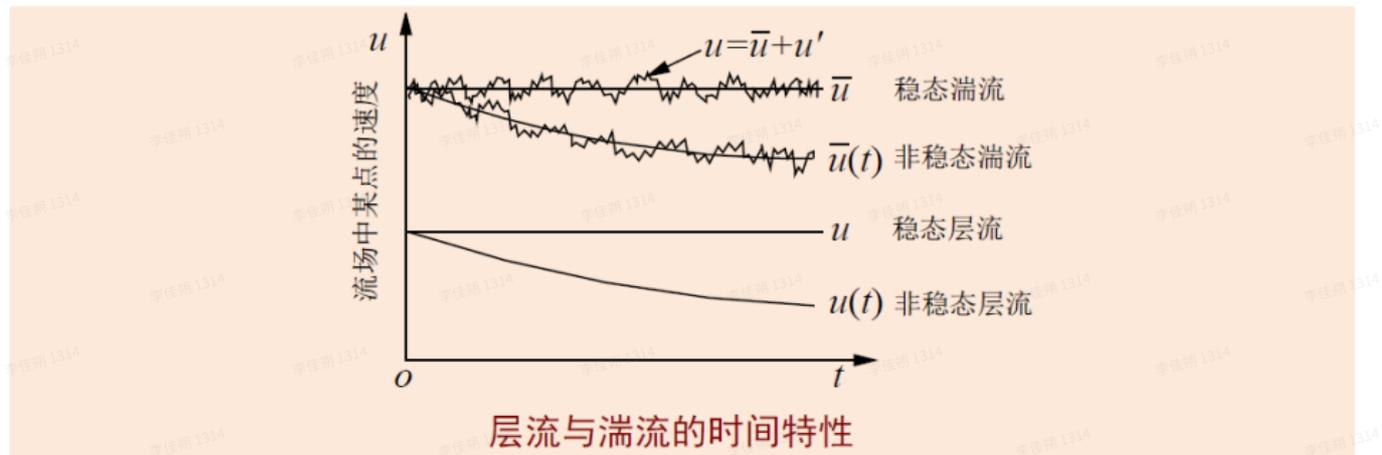
5. 层流与湍流的时间特性

层流：瞬时速度 u 具有确定值；

湍流：瞬时速度 u 为非确定值，即

$$u = \bar{u} + u'$$

\bar{u} —— **时均速度** (该点宏观流速)； u' —— **脉动速度** (该点湍流程度)；



层流与湍流的时间特性

稳态湍流与非稳态湍流： \bar{u} 不随时间变化为稳态湍流，反之为非稳态湍流。

湍流强度 I ：通常认为 u' 各向同性，即 $\bar{u}' = 0$ ，故湍流强度 I 通常表示为：

$$I = \sqrt{u'^2}$$

工程问题中所提及的湍流速度及相关行为，通常都是针对 \bar{u} 而言的。

23. 流场边界

流场边界——流场内的相界面，通常包括

气-液边界：液体自由面；

液-液边界：两种互不相溶液体的交界面；

流-固边界：流体与固体的接触界面，简称固壁边界；

—— **固壁边界阻力** 是动量传递关心的主要问题；

—— **固壁边界形状** 是主导流动形态的重要因素；

—— **改变固壁边界形状，创造 (传热传质) 过程所希望的流动条件 (如均匀分布、充分接触、增强混合、减小阻力、干扰边界层、等)**，是过程设备内构件创新的出发点。

24. 定性尺寸与定性速度

定性尺寸与定性速度：

反映流场边界形状影响的特征尺寸称为定性尺寸，用 L 泛指；

反映流场运动速度影响的特征速度称为定性速度，用 V 泛指。

圆管内的流动： $V = u_m$ (平均流速)， $L = D$ (圆管内径) $\rightarrow Re = \rho u_m D / \mu$

沿平板的流动： $V = u_0$ (来流速度)， $L = L$ (平板纵向长度) $\rightarrow Re_L = \rho u_0 L / \mu$

球体圆柱绕流： $V = u_0$ (来流速度)， $L = D$ (球体/圆柱直径) $\rightarrow Re_D = \rho u_0 D / \mu$

25. 边界影响范围的研究方法

边界影响范围 ~ 研究方法：

① 固壁边界影响传递到整个流场的流动——充分发展的流动；

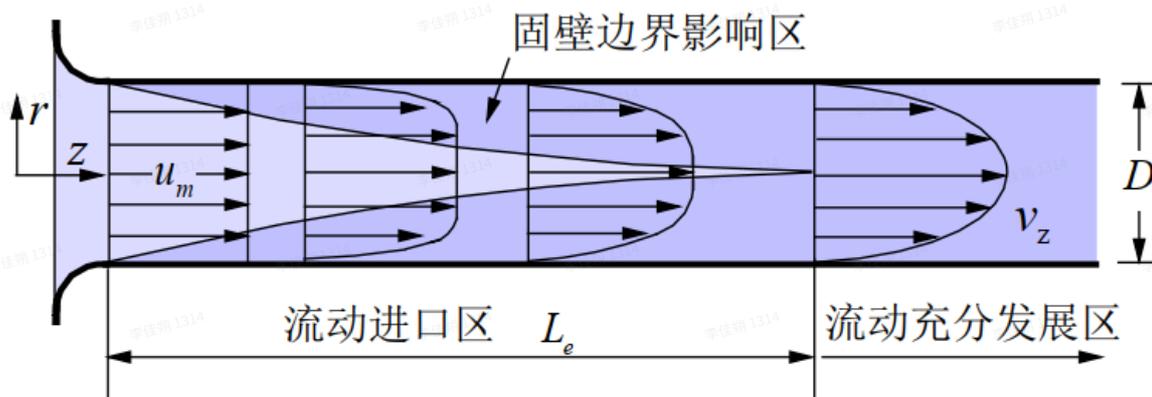
② 固壁边界影响仅限于壁面附近的流动——进口段流动，边界层流动；

1. 圆管中的流动分析

进口区流动： 二维流动， $v_r = v_r(r, z)$ 、 $v_z = v_z(r, z)$ 、 $v_\theta = 0$ ；

充分发展区： 一维流动， $v_z = v_z(r)$ 、 $v_r = v_\theta = 0$ ；

进口区长度： 层流： $L_e = 0.058 D Re$ ，湍流： $L_e = 50 D$ 。



流场边界对流动的影响——圆管内流动

充分发展区流动分析较进口区简单，其中两个明确的边界条件是：

壁面： $v_z = 0$ ， **管中心：** $dv_z/dr = 0$

2. 沿平板表面的流动

边界层流动问题：边界影响仅限于近壁薄层流体内的流动。

流动边界层：受黏性影响（存在速度分布）的近壁流体层；

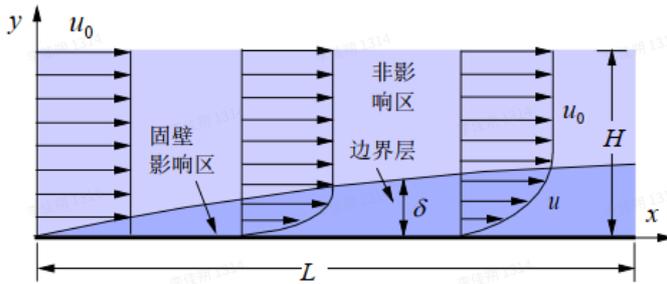
边界层厚度：速度 $u=0 \rightarrow 0.99u_0$ 对应的流体层厚度。

边界层问题通常将流场分为边界层和外流区(边界层以外区域)分别处理。

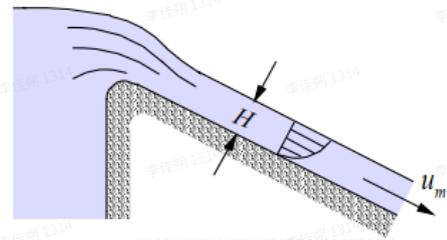
——空气掠过机翼、航天器表面的流动，管道进口区流动属边界层流动。

非边界层流动问题：边界影响将传递到整个流场的流动。

这类问题的分析必须从整个流场出发，考虑壁面/流体自由表面的影响。



(a) 沿平壁表面的流动

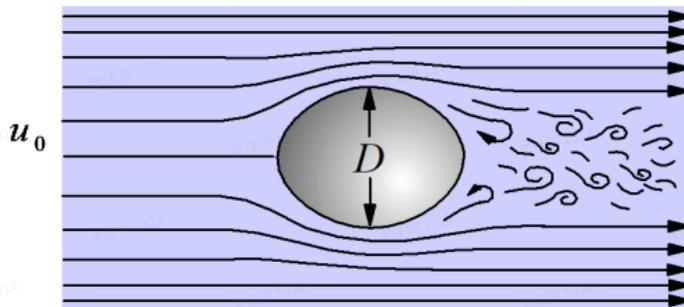


(b) 沿倾斜平壁上的流动

流场边界对流动的影响——沿平壁表面的流动

3. 球体或柱体绕流问题

边界对流动的影响在物体迎风面与沿平壁流动有类似之处，但绕三维物体的流动在物体背风面会出现边界层分离，使问题变得较复杂，如图。



流场边界对流动的影响——绕球体或圆柱体的流动

需要指出：不少工程实际问题，尤其是化工设备比如列管换热器壳程、流化床、搅拌反应器内的流动等，存在多边界的影响且各边界的影响相互耦合，比上述单一边界影响问题复杂。但单一边界影响问题的研究无疑有助于复杂边界问题的理解与分析。

26. 曳力与流动阻力

曳力与流动阻力:

曳力: 沿流动方向, 流体作用于固体的总力, 用 F'_D 表示;

流动阻力: 沿流动方向, 固体作用于流体的总力, 用 F_D 表示;

显然

$$F_D = -F'_D$$

形状阻力和摩擦阻力:

流体对固体壁面的作用力一般有压力 p (法向应力) 和切向应力 τ_0 。

壁面法向应力 p (压力) 在来流方向产生的合力(之反力)称为**形状阻力**;
壁面切向应力在来流方向产生的合力(之反力)称为**摩擦阻力**。

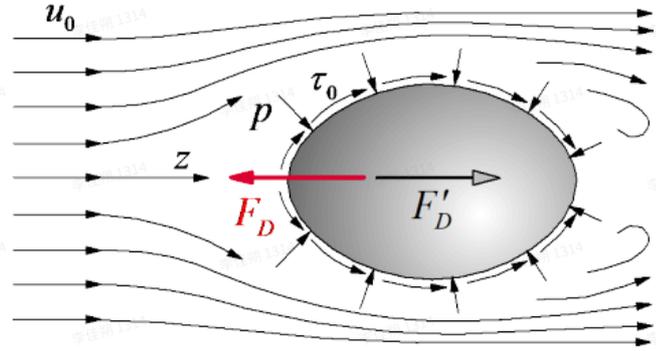
因此:

$$F_D \text{ (总阻力)} = F_f \text{ (摩擦阻力)} + F_p \text{ (形状阻力)}$$

=壁面切应力
在来流方向
产生的合力

=壁面压力
在来流方向
产生的合力

压差
阻力



绕流流动的曳力与阻力

27. 阻力系数

💡 流体阻力公式中的密度(ρ)为流体密度。

① **三维物体绕流的阻力系数:** 为计算方便, 各阻力表达为如下形式:

$$F_D = C_D \frac{\rho u_0^2}{2} A_D$$

C_D —总阻力系数

A_D —物体投影面积

$$F_p = C_p \frac{\rho u_0^2}{2} A_D$$

C_p —形状阻力系数

$$F_f = C_f \frac{\rho u_0^2}{2} A_f$$

C_f —摩擦阻力系数

A_f —物体摩擦面积

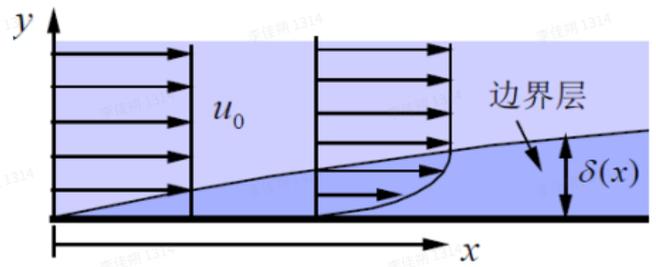
对于球形颗粒或长圆柱, C_D 、 C_p 、 C_f 是 Re 数 ($= \rho u_0 D / \mu$) 的函数。

② 流体平行于平壁表面流动的阻力系数：此时形状阻力 $F_p=0$ ，故

$$F_D = F_f = C_f \frac{\rho u_0^2}{2} A_f$$

因 $F_f / A_f = \tau_0$ (壁面切应力)，故

$$\tau_0 = C_f \frac{\rho u_0^2}{2}$$



该式是平壁表面摩擦阻力系数 C_f 的定义式，相应于 τ_0 是平均/局部切应力， C_f 分别称为平均/局部摩擦阻力系数。

③ 圆管内流动的阻力系数：此时， $F_p=0$ ， $F_D = F_f$ ，类似平壁有

$$\tau_0 = C_f \frac{\rho u_m^2}{2} = \frac{\lambda}{4} \frac{\rho u_m^2}{2}$$

管内流动摩擦系数： $\lambda = 4C_f$ ； $\lambda = f(Re)$ ， $Re = \rho u_m D / \mu$ ； λ 由实验或理论确定。理论： $u = u(r) \rightarrow \tau_0 = \mu (du/dr)_{r=R} \rightarrow \lambda$ 。

摩擦压力降 Δp ：对于圆管内的充分发展的流动（层流或湍流）， τ_0 与 Δp 的作用力相平衡，即 P_0

$$\tau_0 \pi D L = \Delta p \frac{\pi D^2}{4} \rightarrow \Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho u_m^2}{2}$$

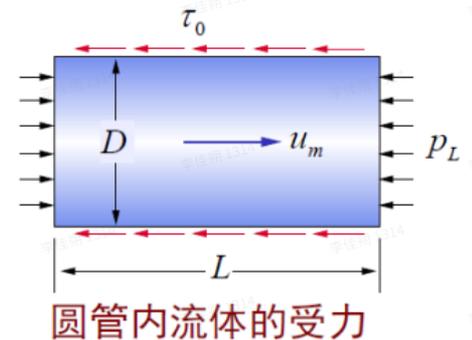
此式是管流问题中更为常用的摩擦系数定义式；实验： $Re \rightarrow \Delta p \rightarrow \lambda$ ， $\rightarrow \lambda \sim Re$ 。比如：

圆管层流： $\lambda = 64 / Re$ ， 圆管湍流： $\lambda = 0.3164 / Re^{0.25}$

摩擦阻力损失 h_f ：管流中通常将 Δp 折算成相同静压的液柱高度 h_f 来表征阻力特性，即： $\rho g h_f = \Delta p$ ，其中 h_f 称为摩擦阻力损失，单位 m；因此有：

$$h_f = \lambda \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2g}$$

综上： τ_0 、 Δp 、 h_f 都表征圆管流动阻力特性， λ 相同，相互等价。



圆管内流体的受力

例题 2-1 2-2 2-3 2-4 2-5 2-6 2-7(略，应该不会考2-7)见PPT

作业 2-1 2-3 2-5 2-7 2-8 2-11 2-12 2-13 2-14 2-15

第二章 做题心得

1. 例2-6 转动只位于某一平面，则只有垂直该平面的角速度分量

由于转动位于 $x-y$ 平面，故 $\omega_x = \omega_y = 0$ ，仅有角速度分量 ω_z ，且

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\omega + \omega) = \omega$$

2. 2-1题 一阶线性常微分方程求解

C. 一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

方法：通解公式

$$y = e^{-\int p(x) dx} \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx + ce^{-\int p(x) dx}$$

；另外，对于初值问题 ($y|_{x=x_0} = y_0$)，有

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi} \left[\int_{x_0}^x f(\zeta) e^{\int_{x_0}^{\zeta} p(\xi) d\xi} d\zeta + y_0 \right]。$$

3. 2-1题 流线要代入 $t=0$

4. 2-3题 不能将 $t=0, x=a, y=b, z=c$ 代入②结果，从而获得③结果，此时求得③中质点温度变化率和加速度，仅为 $t=0$ 时刻的，无法表示 $t \neq 0$ 时刻的，因此应当先求该质点的拉格朗日表达式(迹线)，再代入②中结果，或代入欧拉表达式中求导，两种做法结果相同。(类似例2-3)

在第②问的推导中， x, y, z 是质点在 t 时刻的位置，如果你没有先解出质点的路径，就不知道它 t 时刻到哪里了。

但在 $t=0$ 时刻，这个点恰好是你设定的质点初始位置 (a, b, c) 。

因此：

✅ 在 $t=0$ 这一特例下，你可以将结果中 $x = a, y = b, z = c, t = 0$ 代入第②问的表达式来得到正确结果。

因为此刻质点与空间点重合，且没有移动过。

【例 2-3】 流体质点的速度和加速度

给定欧拉速度场 $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = x(t+1)\mathbf{i} - y(t+1)\mathbf{j}$ ，且 $t=0$ ： $x=a, y=b, z=c$ 。

(1) 求欧拉变量表示的质点加速度；(2) 对于 $t=0$ 时 $x=a, y=b, z=c$ 的质点，求以拉格朗日变量表示的质点速度和加速度。

解：(1) 已知： $v_x = x(t+1), v_y = -y(t+1), v_z = 0$ ，所以根据速度质点导数：

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_i}{\partial y}, \quad i = x, y$$

代入速度分量可得 $a_x = x[1+(t+1)^2], a_y = -y[1-(t+1)^2], a_z = 0$

(2) 根据欧拉速度表达式，建立迹线微分方程

$$\frac{dx}{dt} = v_x = x(t+1), \quad \frac{dy}{dt} = v_y = -y(t+1), \quad \frac{dz}{dt} = v_z = 0$$

求解得： $\ln x = (t+1)^2/2 + c_1, \ln y = -(t+1)^2/2 + c_2, z = c_3$

由 $t=0$ ： $x=a, y=b, z=c$ ，确定积分常数，可得质点迹线方程为

$$x = ae^{t+t^2/2}, \quad y = be^{-(t+t^2/2)}, \quad z = c$$

将 x, y 代入欧拉速度或加速度表达式，或 x, y 直接对 t 求导可得：

$$v_x = ae^{t+t^2/2}(t+1), \quad v_y = -be^{-(t+t^2/2)}(t+1), \quad v_z = 0$$

$$a_x = ae^{t+t^2/2}[1+(t+1)^2], \quad a_y = -be^{-(t+t^2/2)}[1-(t+1)^2], \quad a_z = 0$$

5. 2-8题 判断是否是不可压缩流动 \rightarrow 体积膨胀率等于0。

6. 2-8题 可将 r^2 等价于 $x^2 + y^2$ ，从而判断有旋流动和无旋流动，注意流线方程与迹线方程在极坐标系的表示。

解：求旋转角速度

因为圆管断面上流速可分解成三个分量：

$$u_x = u_m \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) = u_m - \frac{u_m}{r_0^2}(y^2 + z^2), \quad u_y = u_z = 0$$

所以

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = -\frac{u_m}{r_0^2} z$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{u_m}{r_0^2} y$$

③ 迹线方程： $r = C_1, \theta = C_2, z = 2u_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) t$

流线方程： $r = C_1, \theta = C_2$

7. 2-13题 注意 A_f 为摩擦面积，即球体表面积，其余两个系数为投影面积，即球体中心圆截面积。

8. 2-14题 流体阻力公式中的密度为流体密度，而非物体密度。

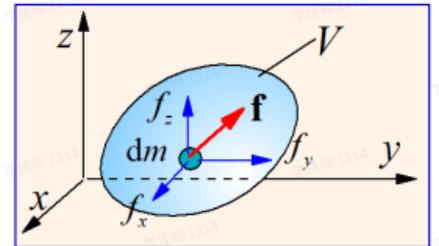
第三章 流体静力学

1. 质量力

质量力：质量力场（重力场、惯性力场）对流体的作用力
作用于流体整个体积——非接触力，体积力，远程力

单位质量力： $\mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\rho \Delta V} = \mathbf{f}(x, y, z, t) = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k}$

\mathbf{f} : N/kg \rightarrow **描述质量力的空间变化**



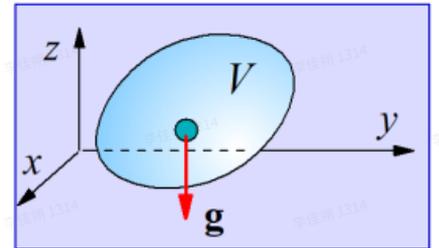
总质量力： $\mathbf{F}_m = \iiint_V \mathbf{f} dm = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV$

重力场质量力： $\mathbf{F}_m = m\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{g} = g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} + g_z \mathbf{k}$

如图

$\mathbf{g} = -g\mathbf{k} \rightarrow g_x = 0, g_y = 0, g_z = -g$

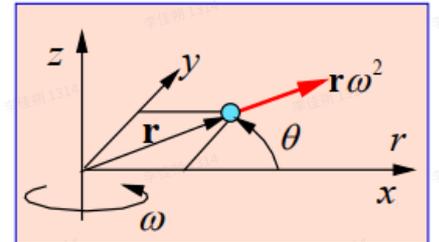
$\mathbf{f} = -g\mathbf{k}, \mathbf{F}_m = -\iiint_V \rho g \mathbf{k} dV = -m\mathbf{g}$



离心场质量力：如图 ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$)

$\mathbf{f} = \mathbf{r}\omega^2 \rightarrow f_r = r\omega^2, f_\theta = 0, f_z = 0$

$\mathbf{f} = x\omega^2 \mathbf{i} + y\omega^2 \mathbf{j} \rightarrow f_x = x\omega^2, f_y = y\omega^2, f_z = 0$



2. 表面力

表面力：流体表面受到的作用力——接触力，近程力

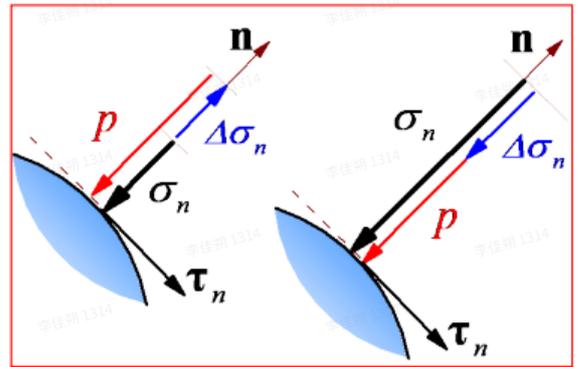
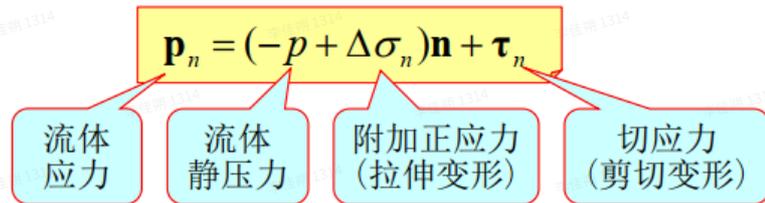
单位面积表面力： $\mathbf{p}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}_n}{\Delta A} = \mathbf{p}_n(x, y, z, t)$ [N/m² or Pa]

总表面力： $\mathbf{F}_A = \iint_A \mathbf{p}_n(x, y, z, t) dA$



3.1.2 表面力

流体表面应力的基本特点



① 真实流体不能承受拉应力, 故: $\sigma_n = (-p + \Delta\sigma_n) < 0$, 即
流体表面的(法向)正应力总是指向流体表面

② 附加正应力 $\Delta\sigma_n$ 和切应力 τ_n 为粘性/运动流体所特有, $\Delta\sigma_n$ 是粘性流体线变形产生的应力(法向), τ_n 是粘性流体剪切变形产生的应力(切向), 故
对于理想或静止流体, 流体表面仅有正应力, 且正应力 = $-p$, 即

$$\Delta\sigma_n = 0, \tau_n = 0, \sigma_n = -p \quad \dots \text{静力学分析}$$

③ 对于不可压缩流体: $\partial v_n / \partial n = 0$, 故:

$$\Delta\sigma_n = 0 \quad \dots \text{不可压缩流动分析}$$

3. 静止流场中的表面力

静止流体表面的应力: 静止流场中: $\Delta\sigma_n = 0, \tau_n = 0$
故流体表面应力 \mathbf{p}_n 简化为

$$\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}$$

即: 静止流体表面仅有正应力, 且该正应力大小等于流体静压力 p , 方向指向流体表面。

静止流体表面 A 的总表面力:

$$\mathbf{F}_A = \iint_A \mathbf{p}_n \, dA = -\iint_A p\mathbf{n} \, dA$$

静压力的特性: 与一般应力不同, 静压力的大小与表面取向无关。

如图: 在静止流场 B 点任意截取表面 A 并取微元体。由 $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$ 可得

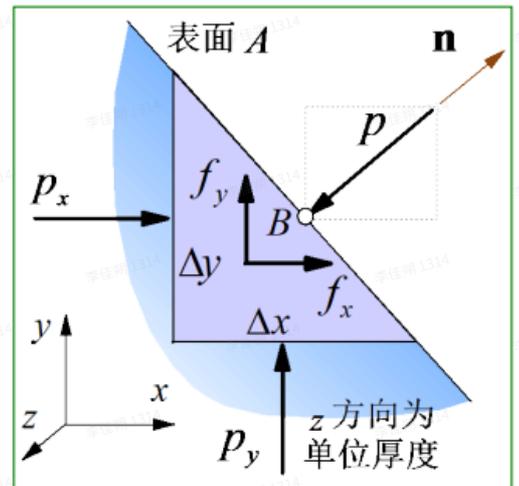
$$p_x \Delta y + f_x \rho (\Delta x \Delta y / 2) - p \Delta y = 0 \rightarrow p_x + f_x \rho (\Delta x / 2) - p = 0$$

$$p_y \Delta x + f_y \rho (\Delta x \Delta y / 2) - p \Delta x = 0 \rightarrow p_y + f_y \rho (\Delta y / 2) - p = 0$$

因考察流场 B 点处的截面取向, 故在上式中令 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, 可得

$$p_x = p_y = p \quad \text{同理有: } p_z = p$$

由此表明: 静压力的大小与表面取向无关, 仅是空间和时间的函数。



4. 压力的表示方法及单位(含常用压力单位及换算关系)

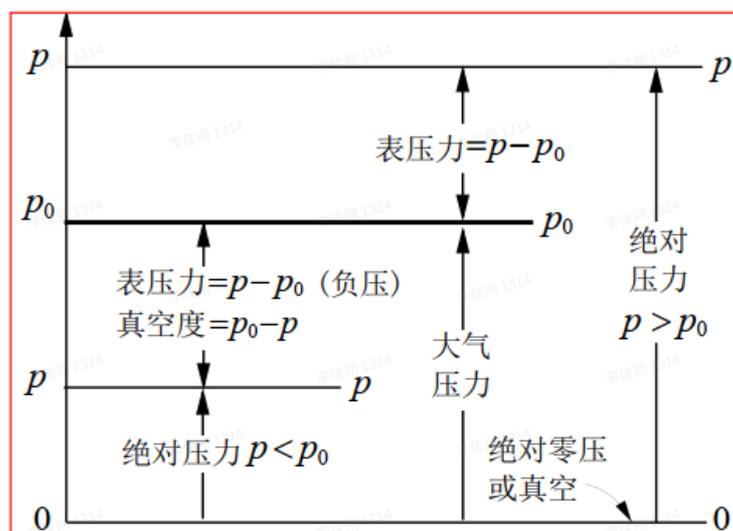
- 做题时使用表B-2, 该表为书中给出的换算关系, 与参考答案相符

绝对压力: p

表压力: $p_{\text{gage}} = p - p_0$

真空度: $p_{\text{vac}} = p_0 - p \quad (p < p_0)$

三者关系: (如图)



常用压力单位及换算关系: (见表)

国际单位制 N/m ² 或Pa	巴 bar	标准大气压 atm	工程大气压 ata或kgf/cm ²	毫米汞柱 mmHg	米水柱 mH ₂ O	英寸汞柱 in Hg	磅/英寸 ² lb/in ²
1	1×10^{-5}	0.9869×10^{-5}	1.0179×10^{-5}	7.5×10^{-3}	10.21×10^{-5}	29.53×10^{-5}	14.5×10^{-5}
1×10^5	1	0.9869	1.0197	750.0	10.21	29.53	14.50
1.0133×10^5	1.0133	1	1.0332	760	10.34	29.92	14.69
9.807×10^4	0.9807	0.9678	1	735.5	10.01	28.96	14.22
1.333×10^5	1.333	1.316	1.360	1000	13.61	39.37	19.34
9798	0.09798	0.09670	0.09991	73.49	1	2.893	1.421
3.386×10^3	0.03386	0.03342	0.03453	25.40	0.3456	1	0.4912
6895	0.06895	0.06804	0.07031	51.71	0.7034	2.036	1

表 B-2 基本单位换算关系

单位	换算关系	备注
质量	$1 [\text{kg}] = 1000 [\text{g}] = 2.20462 [\text{lb}]$	g—克
长度	$1 [\text{m}] = 39.3701 [\text{in}] = 3.2808 [\text{ft}] = 1.0936 [\text{yd}]; 1 [\text{ft}] = 12 [\text{in}]; 1 [\text{in}] = 25.40 [\text{mm}]$	lb—磅
面积	$1 [\text{m}^2] = 10^4 [\text{cm}^2] = 10.764 [\text{ft}^2] = 1550 [\text{in}^2]$	in—英寸
体积	$1 [\text{m}^3] = 10^3 [\text{L}] = 35.31 [\text{ft}^3] = 219.98 [\text{gal (英)}] = 264.17 [\text{gal (美)}]$	ft—英尺
密度	$1 [\text{kg/m}^3] = 1000 [\text{g/cm}^3] = 6.2428 \times 10^{-2} [\text{lb/ft}^3]$	yd—码
力	$1 [\text{N}] = 10^5 [\text{dyne}] = 0.10197 [\text{kgf}] = 0.22488 [\text{lbf}]$	gal—加仑
压力	$1 [\text{Pa}] = 10^{-5} [\text{bar}] = 1.0197 \times 10^{-5} [\text{kg/cm}^2] = 14.5 \times 10^{-5} [\text{lbf/in}^2] = 7.5 \times 10^{-3} [\text{mm-Hg}] = 10.21 \times 10^{-2} [\text{mmH}_2\text{O}] = 29.53 \times 10^{-5} [\text{inHg}] = 0.9869 \times 10^{-5} [\text{标准大气压}]$	dyne—达因
黏度	$1 [\text{Pa} \cdot \text{s}] = 10^3 [\text{cp}] = 0.6721 [\text{lb/(ft} \cdot \text{s)}] = 0.102 [\text{kgf} \cdot \text{s/m}^2] = 2.09 \times 10^{-2} [\text{lbf} \cdot \text{s/ft}^2]$	kgf—公斤力
能, 功	$1 [\text{J}] = 0.2389 \times 10^{-3} [\text{kcal}] = 9.485 \times 10^{-4} [\text{BTU}] = 0.7378 [\text{lbf} \cdot \text{ft}]$	lbf—磅力
功率	$1 [\text{kW}] = 1000 [\text{W}] = 0.2389 [\text{kcal/s}] = 0.9485 [\text{BTU/s}] = 1.3410 [\text{hp}] = 737.79 [\text{ft} \cdot \text{lbf/s}]$	bar—巴
热容	$1 [\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})] = 0.2389 \times 10^{-3} [\text{kcal}/(\text{kg} \cdot \text{C})] = 0.2389 \times 10^{-3} [\text{BTU}/(\text{lb} \cdot \text{F})]$	cp—厘泊
导热系数	$1 [\text{J}/(\text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{K})] = 1 [\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})] = 0.860 [\text{kcal}/(\text{m} \cdot \text{h} \cdot \text{C})] = 0.5779 [\text{BTU}/(\text{ft} \cdot \text{h} \cdot \text{F})]$	BTU—英热单位
温度	$t(^{\circ}\text{C}) = [t(^{\circ}\text{F}) - 32] \times 5/9; T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273$	hp—马力
		F—华氏度

5. 流体静止的平衡方程

$$\rho f_x \mathbf{i} + \rho f_y \mathbf{j} + \rho f_z \mathbf{k} = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$f_x \rho = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad f_y \rho = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad f_z \rho = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\mathbf{f} \rho = \nabla p$$

6. 静止流场压力微分方程

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \nabla p \cdot d\mathbf{r}$$

$$dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

7. 压力微分方程的意义

压力微分方程的意义：

$$\therefore d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}, \quad \mathbf{f} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$$

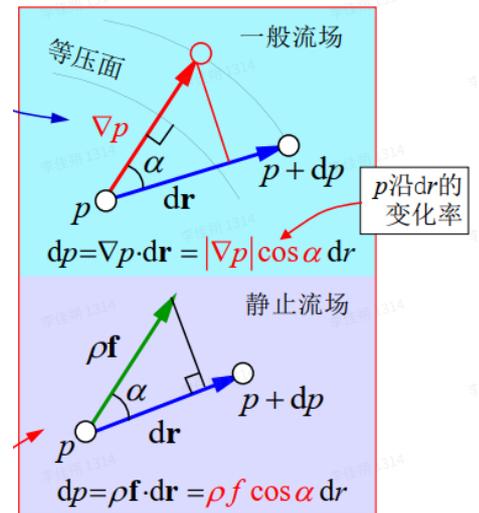
$$\rightarrow \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = (f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

$$\therefore dp = \rho \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = (\rho f \cos \alpha) dr$$

其中： dp —— 沿 dr 的压力能增量

$(\rho f \cos \alpha)$ —— $\rho \mathbf{f}$ 在 dr 方向的投影

即：静止流场中，压力能 p 沿 dr 的增量 = 质量力 $\rho \mathbf{f}$ 沿 dr 做的功



8. 静止流场基本特性

(1) 质量力 \mathbf{f} 垂直于等压面

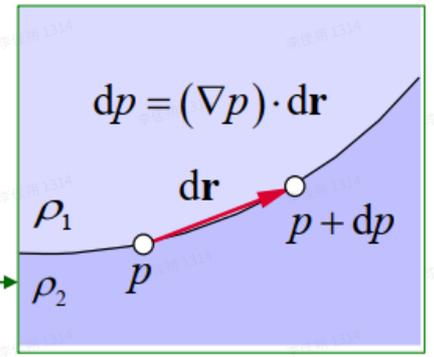
$\nabla p \perp$ 等压面, $\rho \mathbf{f} = \nabla p \rightarrow \mathbf{f} \perp$ 等压面

(2) 沿 \mathbf{f} 方向, p 的变化率最大

静止流场中: $dp = \rho \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = (\rho f \cos \alpha) dr$

当 p 的变化方向 $d\mathbf{r}$ 与 \mathbf{f} 同向时, $\cos \alpha = 1$, 即

$$(dp/dr) = \rho f \cos \alpha \rightarrow (dp/dr)_{\max} = \rho f$$



(3) 两种流体的分界面是等压面

$$\text{分界面上} \begin{cases} dp_1 = \rho_1 \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{r} \\ dp_2 = \rho_2 \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{r} \end{cases} \because \begin{cases} dp_1 = dp_2 = dp \\ \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{f} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dp = \rho_1 \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \\ dp = \rho_2 \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \end{cases} \rightarrow \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) dp = 0$$

又 $\because \rho_1 \neq \rho_2, \therefore dp = 0$ 即: **分界面上压力不变 \rightarrow 分界面为等压面。**

(4) 正压流场中等压面与等密度面重合

正压流场: $\rho = f(p)$; 如: 理想气体等温流场是正压流场 $\because p/\rho = \text{const}$

正压流场中 ρ 仅与 p 相关, p 恒定则 ρ 恒定, 故 **等压面必为等密度面。**

9. 重力场静止液体的压力分布

3.3.1 重力场静止液体的压力分布

重力场静止流体压力微分方程:

如图, 取 $\mathbf{g} = -g\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{g} = -g\mathbf{k}$

根据 $dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz)$

可得静止流体压力微分方程:

$$dp = -\rho g dz$$

应用于静止
气体需确定
 $\rho = f(p)$

重力场静止液体压力分布: 积分上式可得

压力分布方程: $p = p_0 - \rho g z$

或, 令 $h = -z$ 有: $p = p_0 + \rho g h$

压力递推方程: $p_A = p_B \pm \rho g h$

等压面方程: $dp = 0 \rightarrow z = c$

自由面方程: $p = p_0 \rightarrow z = 0$

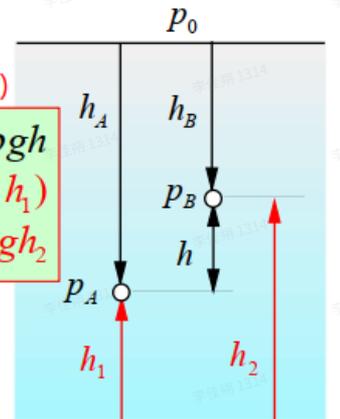
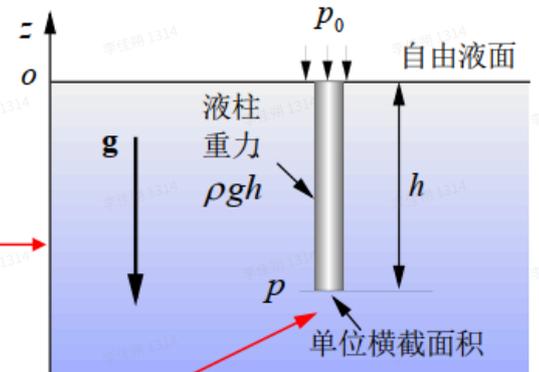
物理意义

(静止流体伯努利方程)
 $p_A = p_B + \rho g h$
 $h = (h_2 - h_1)$
 $p_A + \rho g h_1 = p_B + \rho g h_2$

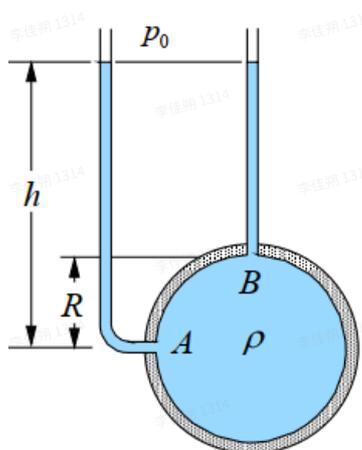
(静止/联通/相同流体)

(等压面是水平面)

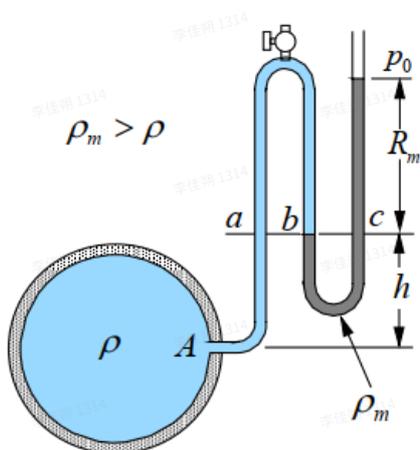
(自由液面是水平面、等压面)



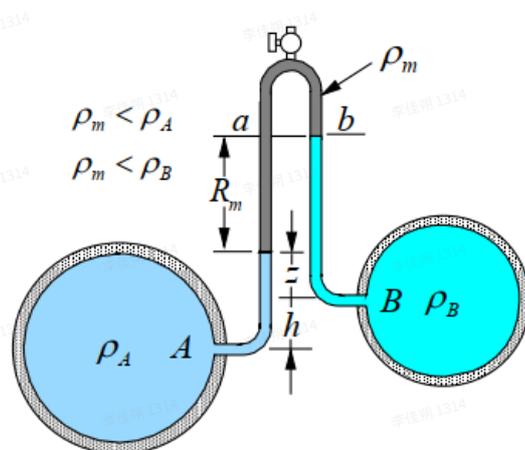
10. U型管测压计原理



$$\begin{aligned}
 p_A &= p_0 + \rho gh \\
 &= p_B + \rho gR \\
 p_B &= p_0 + \rho g(h - R) \\
 &= p_A - \rho gR
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 p_A &= p_a + \rho gh \\
 &= p_b + \rho gh \\
 &= p_c + \rho gh \\
 &= p_0 + \rho_m gR_m + \rho gh
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 p_a &= p_A - \rho_m gR_m - \rho_A g(z + h) \\
 p_b &= p_B - \rho_B g(z + R_m) \\
 p_B - p_A &= (\rho_B - \rho_m)gR_m \\
 &\quad + \rho_B gz - \rho_A g(z + h)
 \end{aligned}$$

11. 静止液体中的器壁受力

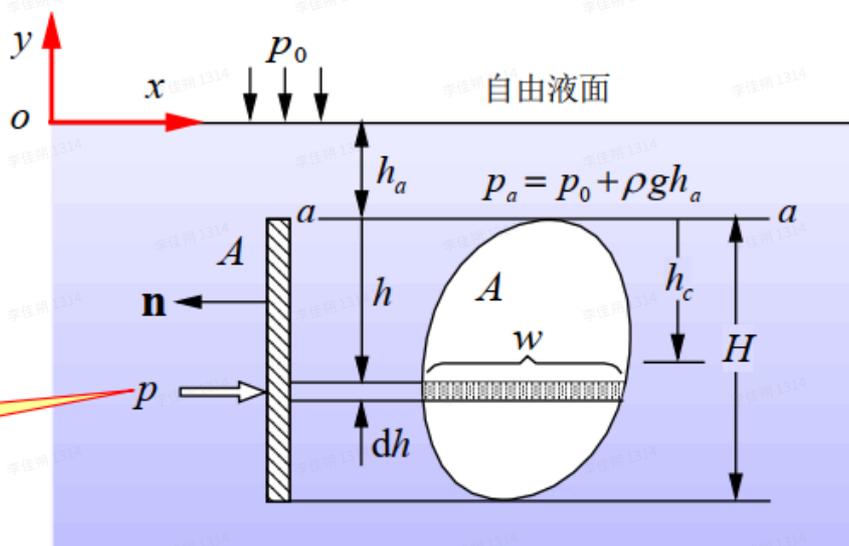
1. 竖直平壁的受力

(1) 竖直平壁的受力

基本方程: $\mathbf{F} = -\iint_A \mathbf{n} p dA$

表面法线: $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$

$p = p_a + \rho gh$



$$\mathbf{F} = -\iint_A \mathbf{n} p dA = \iint_A \mathbf{i} (p_a + \rho gh) dA = (p_a A + \rho g \iint_A h dA) \mathbf{i} = (p_a A + \rho g \int_0^H h w dh) \mathbf{i}$$

即

$$F_x = p_a A + \rho g \int_0^H h w dh \quad (\text{须知 } w = f(h))$$

∴ 表面A的形心坐标:

$$h_c = \frac{1}{A} \iint_A h dA = \frac{1}{A} \int_0^H h w dh$$

∴

$$F_x = p_a A + \rho g h_c A$$

应用于规则表面A

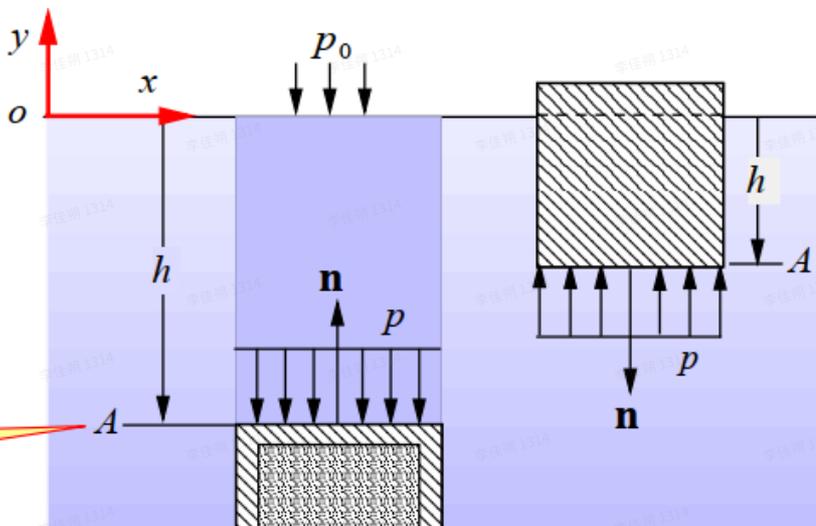
2. 水平平壁的受力

(2) 水平平壁的受力

基本方程: $\mathbf{F} = -\iint_A \mathbf{n} p dA$

表面法线: $\mathbf{n} = \pm \mathbf{j}$

$p = p_a + \rho g h$



因此

$$\mathbf{F} = -\iint_A \mathbf{n} p dA = \mp \iint_A \mathbf{j} (p_0 + \rho g h) dA = \mp (p_0 A + \rho g h A) \mathbf{j}$$

即

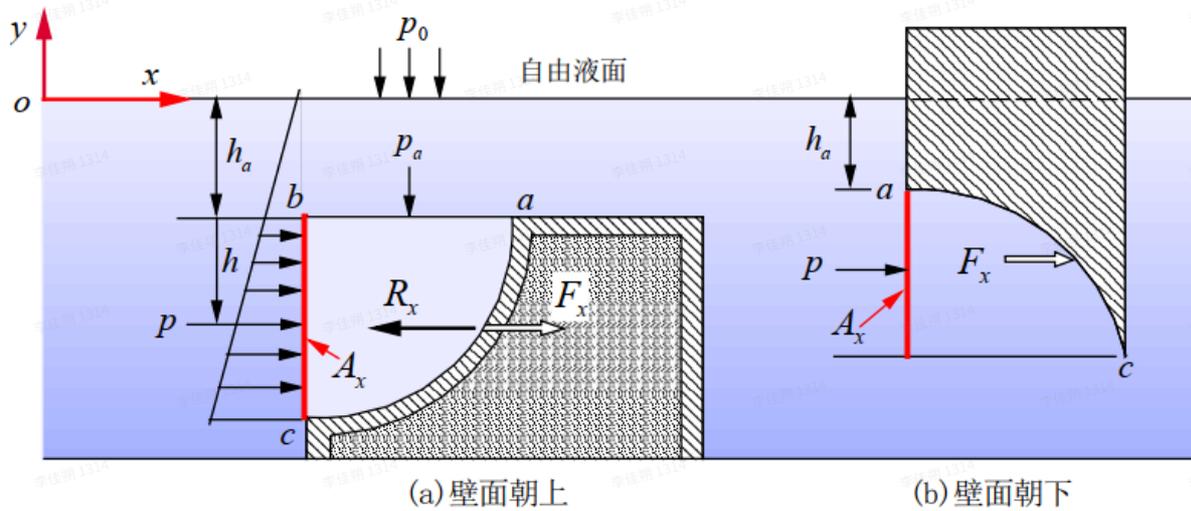
$$F_y = \mp (p_0 A + \rho g h A) = \mp (p_0 A + \rho g V)$$

**气压作用力
与深度无关**

**液压作用力 = 平
壁以上液柱重力**

3. 弯曲(或倾斜)壁面的受力

(3) 弯曲(或倾斜)壁面的受力——弯曲壁面在水平方向的受力



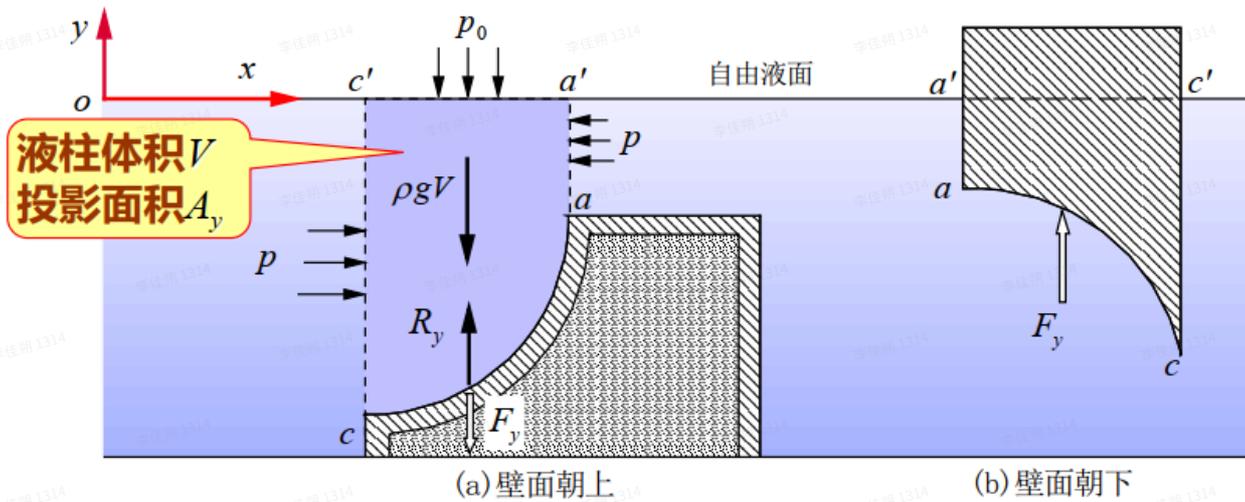
考察a-b-c围成的区域：由该区域流体x方向受力平衡可得

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_x = -R_x = p_a A_x + \rho g \iint_{A_x} h dA_x$$

A_x —弯曲表面在x方向的投影面积

上式表明：静止液体中，弯曲或倾斜壁面在水平方向(x方向)的受力等同于壁面在该方向投影面(竖直平壁)的受力。

(3) 弯曲(或倾斜)壁面的受力——弯曲壁面在竖直方向的受力



考察曲面a-c对应液柱在竖直方向(y方向)的力平衡可得：

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_y = -R_y = p_0 A_y + \rho g V$$

气压作用

液柱重力

注：液柱底面是曲面A，而不是投影面积 A_y 。壁面朝下同样如此，如图(b)。

4. 器壁静压力的力矩、合力作用中心

约定：右手螺旋坐标系，逆时针力矩为正。

x-y 平面问题：微元面上静压力dF的力矩为

$$dM_{z,F_x} = -y dF_x, \quad dM_{z,F_y} = x dF_y$$

静压力对壁面A的总力矩为 $M_z = M_{z,F_x} + M_{z,F_y}$

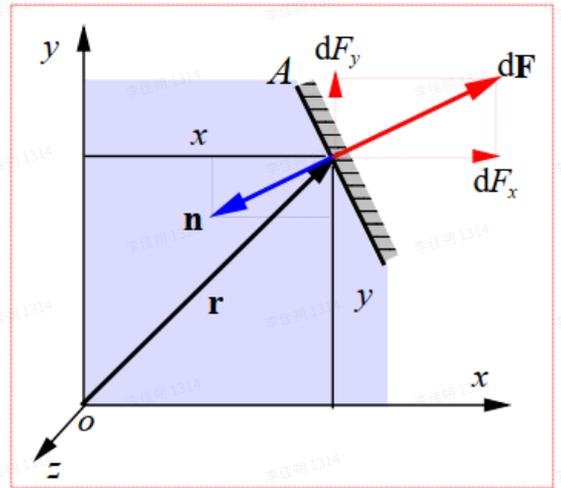
$$M_{z,F_x} = \iint_A dM_{z,F_x} = \iint_A -y dF_x$$

$$M_{z,F_y} = \iint_A dM_{z,F_y} = \iint_A x dF_y$$

设 F_x 、 F_y 的作用中心位置为 x_c 、 y_c ，则

$$x_c F_y = M_{z,F_y} \rightarrow x_c = \frac{M_{z,F_y}}{F_y} = \frac{1}{F_y} \iint_A x dF_y$$

$$-y_c F_x = M_{z,F_x} \rightarrow y_c = -\frac{M_{z,F_x}}{F_x} = -\frac{1}{F_x} \iint_A y dF_x$$



此处负号删去

关键是确定 dF_x 、 dF_y

12. 静止液体中的浮力

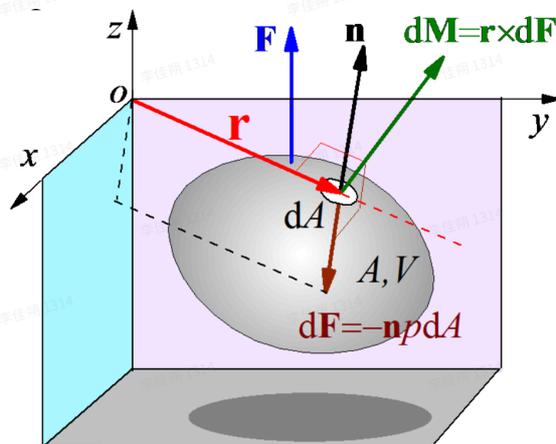
即：无论完全还是部分浸没，用 V 表示物体浸没部分体积，物体表面力的合力(浮力)可统一表示为：

$$\mathbf{F} = \rho g V \mathbf{k} \quad \text{—— 阿基米德定律}$$

13. 静止液体中的浮力矩

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j}, \quad M_x = \iiint_V \rho g y dV, \quad M_y = -\iiint_V \rho g x dV$$

$$\mathbf{F} = \rho g V \mathbf{k}, \quad \mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{F} \perp \mathbf{M}$$



该浮力力矩计算式对完全浸没和部分浸没两种情况都适用。

14. 静止液体中的浮力中心位置

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_V x dV, \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint_V y dV, \quad z_c = \frac{1}{V} \iiint_V z dV$$

即：浮力中心就是物体浸没部分体积的形状中心(形心)。

15. 浮力稳定性

浮体稳定性:由浮力中心(浸没物体形心)与物体重心之间的相对位置确定。

💡 只有浮力中心与重心在一条竖直线上时，物体才能稳定。

16. 非惯性系静力学方程

非惯性坐标系——相对于地面变速运动的坐标系

流体处于相对静止状态的非惯性坐标系有：

直线匀加速坐标系：加速度 \mathbf{a} 为定值

匀转速运动坐标系：向心加速度 \mathbf{a} 为定值

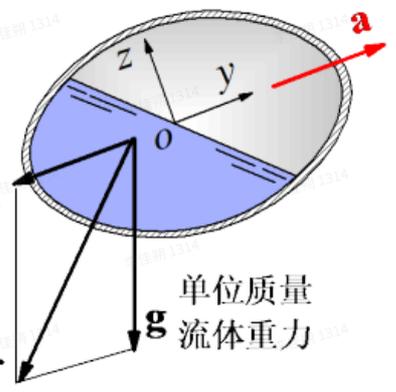
重力场非惯性系中流体的质量力

流体的总单位质量力： $\mathbf{f} = \mathbf{g} - \mathbf{a}$

单位质量流体的惯性力 $-\mathbf{a}$

总单位质量力 \mathbf{f}

单位质量流体重力 \mathbf{g}



非惯性系静力学基本方程：非惯性坐标系中质量力 \mathbf{f} 与表面力仍然构成平衡力系 (达朗贝尔原理)。但流体相对静止时，表面力仅有静压力 p ，因此考虑惯性力后的 \mathbf{f} 与表面力 $-p\mathbf{n}$ 的平衡方程仍然成立，即

$$\rho \mathbf{f} = \nabla p \quad \rightarrow \quad \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = \nabla p$$

或

$$\rho(g_x - a_x) = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho(g_y - a_y) = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho(g_z - a_z) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{(静力平衡方程)}$$

相应地有：

$$dp = \rho[(g_x - a_x)dx + (g_y - a_y)dy + (g_z - a_z)dz] \quad \text{(压力微分方程)}$$

17. 直线匀加速系统中的静止液体

压力微分方程:

考察: 直线匀加速系统中处于相对静止的液体
图示坐标下, 单位质量流体惯性力和重力为:

$$a_x = a \cos \beta, \quad a_y = a \sin \beta, \quad a_z = 0$$

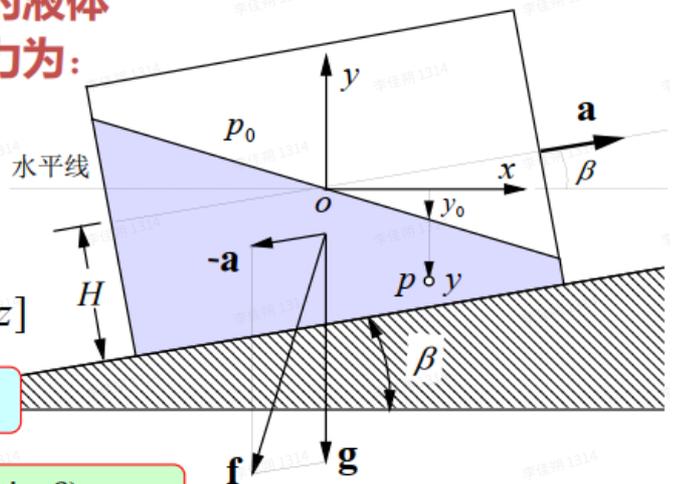
$$g_x = 0, \quad g_y = -g, \quad g_z = 0$$

代入压力微分方程:

$$dp = \rho[(g_x - a_x)dx + (g_y - a_y)dy + (g_z - a_z)dz]$$

得:

$$dp = -\rho a \cos \beta dx - \rho(g + a \sin \beta) dy$$



压力分布方程:

$$p = -\rho(a \cos \beta)x - \rho(g + a \sin \beta)y + c$$

或:

$$x=0, y=0: p=p_0 \rightarrow c=p_0 \rightarrow p = p_0 - \rho(a \cos \beta)x - \rho(g + a \sin \beta)y$$

等压面方程:

$$dp = 0 \rightarrow y = -\frac{a \cos \beta}{(g + a \sin \beta)}x + C_1$$

自由液面方程: $x=0, y=0 \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow$

$$y_0 = -\frac{a \cos \beta}{(g + a \sin \beta)}x \quad (\perp x-y \text{ 的斜平面})$$

流场特性验证:

等压面斜率 k 、质量力斜率 k_f 、以及两者关系为:

$$y = -\frac{a \cos \beta}{(g + a \sin \beta)}x + C_1 \rightarrow k = -\frac{a \cos \beta}{(g + a \sin \beta)}$$

$$f_x = g_x - a_x = -a \cos \beta$$

$$f_y = g_y - a_y = -(g + a \sin \beta)$$

$$\rightarrow k_f = \frac{f_y}{f_x} = \frac{(g + a \sin \beta)}{a \cos \beta}$$

$$\rightarrow kk_f = -1$$

质量力 \perp 等压面

压力分布方程的统一形式:

$$p = p_0 - \rho(a \cos \beta)x - \rho(g + a \sin \beta)y$$

$$= p_0 + \rho(g + a \sin \beta) \left(-\frac{(a \cos \beta)}{(g + a \sin \beta)}x - y \right)$$

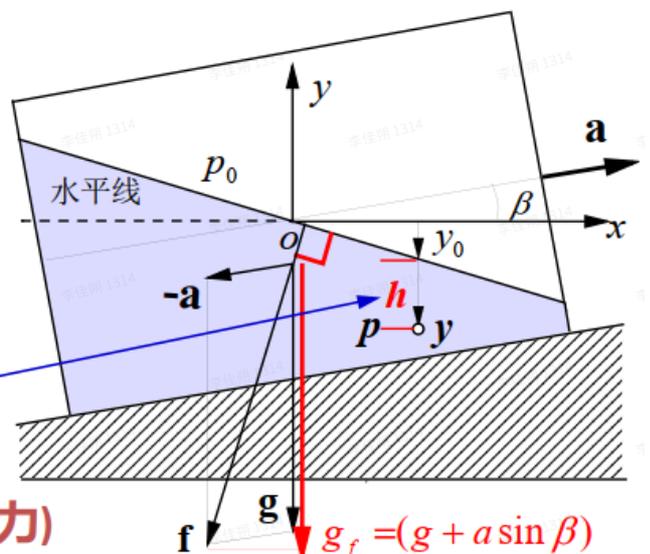
$$= p_0 + \rho(g + a \sin \beta)(y_0 - y)$$

令: $g_f = (g + a \sin \beta), \quad h = (y_0 - y)$

可得:

$$p = p_0 + \rho g_f h$$

g_f —— 垂直向下的质量力(有效重力)



18. 匀速转动系统

可得:

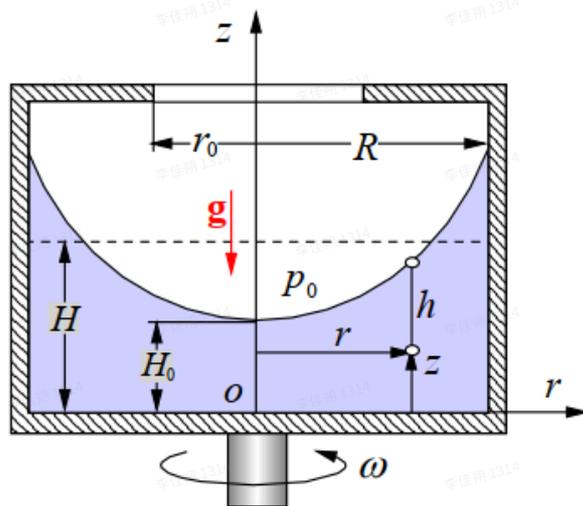
$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$$

或

$$dp = \rho \left(\frac{\omega^2}{2} dr^2 - g dz \right)$$

转动系统压力分布方程: 积分上式得

$$p = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} - \rho g z + C$$



3.4.3 匀速转动系统中的静止液体

压力分布:

$$p = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} - \rho g z + C$$

等压面方程: 等压面 $p = \text{const}$, 因此有

$$z = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + C_1$$

自由液面方程: $r=0, z=H_0$, 并记 $z=z_0$, 有

$$z_0 = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + H_0$$

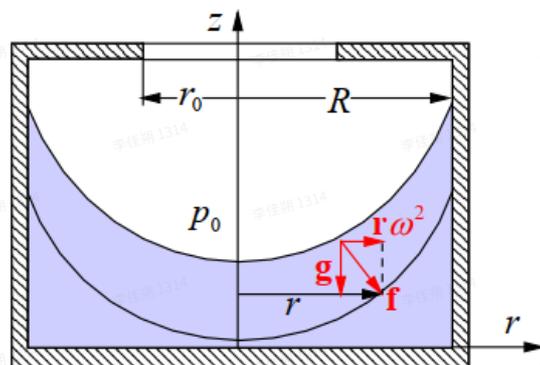
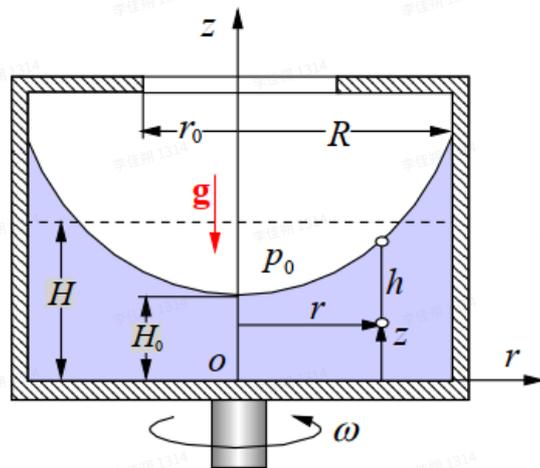
其中 H_0 可根据质量守恒确定:

$$\pi R^2 H = \int_0^R z_0 2\pi r dr \rightarrow H_0 = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

或

$$z_0 = H - \frac{(\omega R)^2}{2g} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

此外: $k = \frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$, $k_f = \frac{f_z}{f_r} = -\frac{g}{r\omega^2} \rightarrow kk_f = -1 \rightarrow \text{质量力} \perp \text{等压面}$



压力分布方程的统一形式:

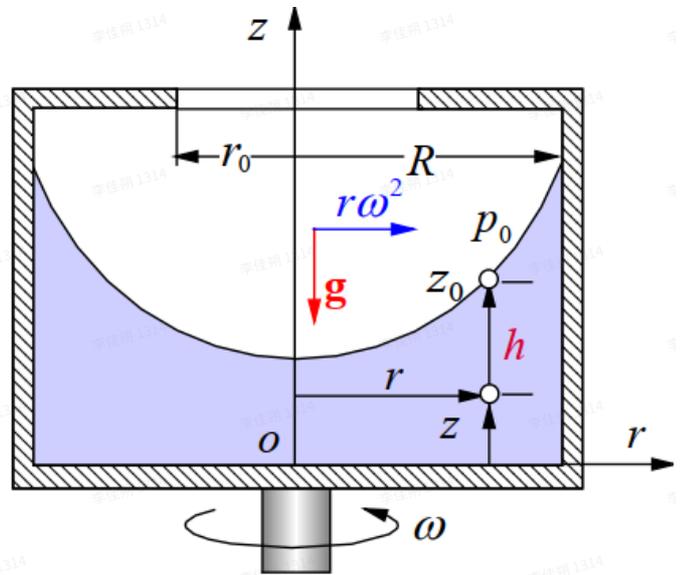
$$r=0, z=H_0 \rightarrow C = p_0 + \rho g H_0$$

$$p = p_0 + \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} + H_0 - z \right)$$

$$z_0 = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + H_0$$

所以

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z) = p_0 + \rho g h$$



与重力场静止液体压力分布方程形式相同，因竖直方向质量力仅有 g 。

19. 高速回转圆筒内的液压分布

问题特点：高速回转圆筒内液体所受离心力远大于重力： $r\omega^2 \gg g$

例如： $n=1000\text{rpm}$ ， $R=400\text{mm}$ 的低速离心机：

$$\frac{\omega^2 R}{g} = \frac{(1000\pi/30)^2 \cdot 0.4}{9.81} = 447$$

因此，对于高速回转液压问题，可忽略重力。

压力微分方程：

$$dp = \rho \left(\frac{\omega^2}{2} dr^2 - g dz \right) \rightarrow dp = \frac{1}{2} \rho \omega^2 dr^2$$

等压面方程： $dp = 0 \rightarrow \frac{\omega^2}{2} r^2 = c$ (圆柱面)

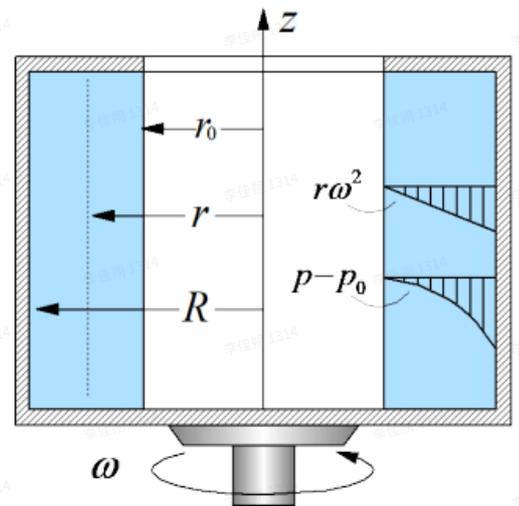
压力分布方程：积分压力微分方程且考虑 $r=r_0$: $p=p_0$ 得

$$p - p_0 = \frac{\rho \omega^2}{2} (r^2 - r_0^2)$$

$$p = p_0 + \rho g_c h_r$$

$h_r = (r - r_0)$
液面径向深度

$g_c = \omega^2 (r + r_0) / 2$
平均半径处的
向心加速度



例题 3-1 3-2 3-3 3-4 3-5 3-6 3-7 见PPT

作业 3-2 3-4 3-5 3-8 3-10 3-13 3-15 3-20 3-22

第三章 做题心得

1. 例题3-4 华里士公式可解下述积分

积分上式可得投影面 A_x 上静压力对 z 轴的总力矩为

$$M_{z, F_x} = \int_{A_x} dM_{z, F_x} = -2\rho g R^4 \int_0^\pi (1 - \cos \alpha) \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = \frac{\pi \rho g R^4}{4}$$

2. 例3-6 $n(\text{r/min})$ 与 $w(\text{rad/s})$ 的转换

$$n = \frac{30\omega}{\pi}$$

3. 例3-6 等式右侧等价于 $\int_0^H \pi r^2 dz_1 = \int_0^{r_1} \pi r^2 \cdot \frac{w^2}{2g} \cdot 2r dr$ (不同的积分思路)

$$\pi R^2 (H - h) = \pi r_1^2 H - \int_0^{r_1} z_1 2\pi r dr$$

4. 3-4题 公式见例3-1, 通过 $\frac{\partial T}{\partial z}$ 求多变参数 n 即可

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_0} &= 1 - \frac{\rho_0 (n-1) g z}{n p_0} \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= - \frac{T_0 \rho_0 (n-1) g}{n p_0} = -k = -0.007 \text{ K/m} \\ n &= \frac{T_0 \rho_0 g}{T_0 \rho_0 g - k p_0} = 1.243 \end{aligned}$$

5. 3-10题 注意油处分界面的压力求法

$$\frac{G + \rho_0 g h \cdot a l}{a l} =$$

6. 3-13题 圆柱体所受的竖直方向的力为浮力, 等于 $\rho_{\text{液}} g V_{\text{排}} = \frac{1}{4} \rho g \pi D^2 L$

7. 例3-3中 $dF_x = p dy$, $dF_y = -p dx$, 例3-4 $dF_x = p dA$, $dF_y = -dG = -\rho dV$

第四章 流体流动的守恒原理

1. 系统守恒定律

(1) 系统守恒定律

尺度量: 与质量成正比的量 (广延量)

质量: m **动量:** mv **动量矩:** $r \times mv$ **能量:** $E = me$

守恒定律: “系统尺度量时间变化率” 与 “作用因素” 之间的关系

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{\text{系统}} = 0 \quad \left. \frac{dmv}{dt} \right|_{\text{系统}} = \sum \mathbf{F} \quad \left. \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})m}{dt} \right|_{\text{系统}} = \sum \mathbf{M} \quad \left. \frac{dE}{dt} \right|_{\text{系统}} = \dot{Q} - \dot{W}$$

守恒定律统一形式:

$$\left. \frac{d\phi m}{dt} \right|_{\text{系统}} = \Phi \quad \begin{cases} \phi = 1, & \Phi = 0 & \text{质量守恒} \\ \phi = \mathbf{v}, & \Phi = \sum \mathbf{F} & \text{动量守恒} \\ \phi = \mathbf{r} \times \mathbf{v}, & \Phi = \sum \mathbf{M} & \text{动量矩守恒} \\ \phi = e, & \Phi = \dot{Q} - \dot{W} & \text{能量守恒} \end{cases}$$

强度量?
 T, P

e —单位质量流体的储存能

2. 系统与控制体

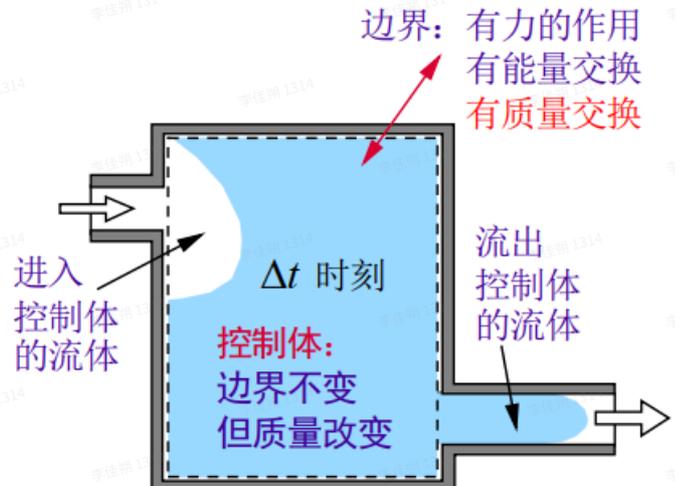
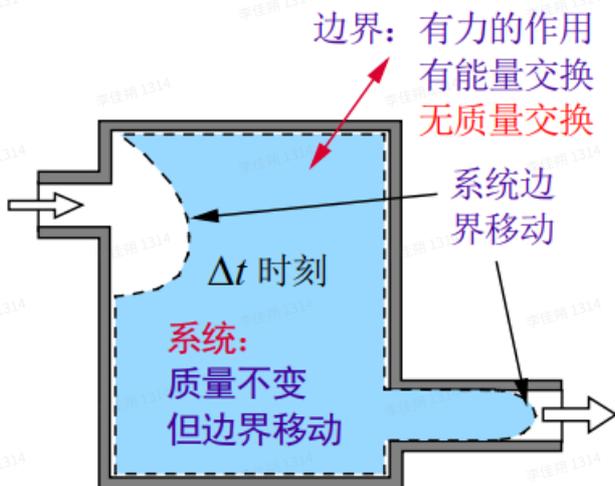
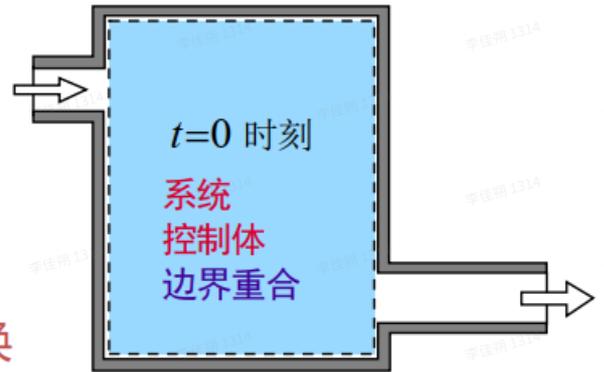
(2) 系统与控制体

系统: 质量确定不变的物质集合

控制体: 有确定位置和形状的流场空间

特点与问题:

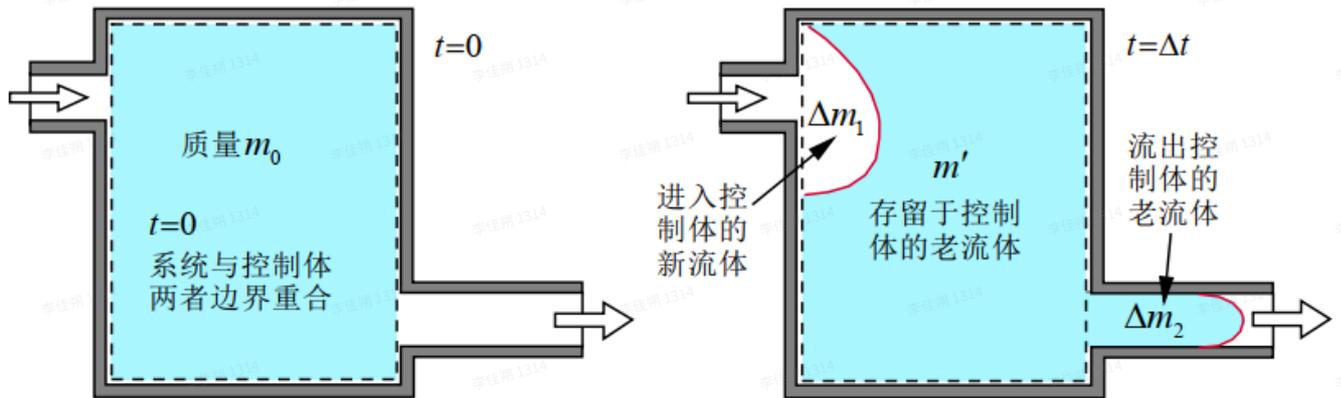
- 以系统为对象难以追踪边界
- 以控制体为对象, 守恒定律需要变换



3. 输运方程

(3) 输运方程

——适用于控制体的“系统尺度量时间变化率”转换方程



系统质量的变化率:
$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{系统}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[(\Delta m_2 + m') - m_0]}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{系统}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta m_1 + m') - m_0}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m_2}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m_1}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{系统}} = \text{控制体内的} \frac{dm_{cv}}{dt} \text{质量变化率} + \text{输出控制体的质量流量} - \text{输入控制体的质量流量}$$

系统尺度量时间变化率的输运方程

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{系统}} = \text{输出控制体的质量流量} - \text{输入控制体的质量流量} + \text{控制体内的质量变化率}$$

$$\left(\frac{dmv}{dt}\right)_{\text{系统}} = \text{输出控制体的动量流量} - \text{输入控制体的动量流量} + \text{控制体内的动量变化率}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{系统}} = \text{输出控制体的能量流量} - \text{输入控制体的能量流量} + \text{控制体内的能量变化率}$$

4. 控制体守恒方程

$$\begin{aligned}
 & \text{输出控制体的质量流量} - \text{输入控制体的质量流量} + \text{控制体内的质量变化率} = 0 \\
 & \text{输出控制体的动量流量} - \text{输入控制体的动量流量} + \text{控制体内的动量变化率} = \Sigma \mathbf{F} \\
 & \text{输出控制体的能量流量} - \text{输入控制体的能量流量} + \text{控制体内的能量变化率} = \dot{Q} - \dot{W}
 \end{aligned}$$

控制面上的净输出速率

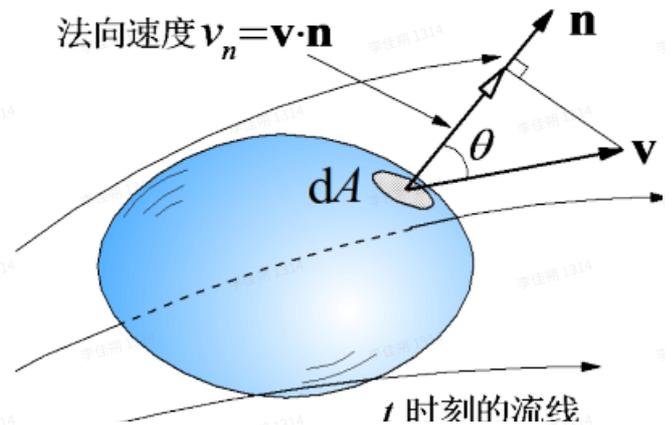
应用：基于宏观控制体——积分方程；基于微元控制体——微分方程；

5. 控制体的法向速度

(1) 控制面的法向速度及质量流量

法向速度： $v_n = |\mathbf{v}| \cos \theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \begin{cases} > 0, \text{ 即 } \theta < \pi/2, \text{ 流体输出控制面} \\ = 0, \text{ 即 } \theta = \pi/2, \text{ 流体平行控制面} \\ < 0, \text{ 即 } \theta > \pi/2, \text{ 流体输入控制面} \end{cases}$$



6. 控制体的质量流量

质量流量：

微元面 dA 上的质量流量：

$$dq_m = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \begin{cases} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \rightarrow \text{质量通量} \\ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \rightarrow \text{体积流量} \end{cases}$$

约定：无论输入输出，总质量流量 q_m 总取正值。因此

输入面 A_1 ： $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$, $dq_m < 0$, 故 输出面 A_2 ： $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$, $dq_m > 0$, 故

$$q_{m1} = \iint_{A_1} -dq_m = \iint_{A_1} -\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$q_{m2} = \iint_{A_2} dq_m = \iint_{A_2} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

封闭控制面 CS ： $CS = A_1 + A_2 + A_0$, 其中 A_0 面 $q_m = 0$ ； CS 净输出的质量流量为

$$q_{m2} - q_{m1} = \iint_{A_2} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA - \iint_{A_1} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \iint_{CS} dq_m = \iint_{CS} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = q_{m2} - q_{m1}$$

即： dq_m 或 $\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$ 沿封闭控制面 CS 积分为净输出质量流量

7. 控制体质量守恒方程

一般形式的质量守恒方程:

$$\iint_{CS} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{d}{dt} \iiint_{CV} \rho dV = 0 \quad \text{or} \quad q_{m2} - q_{m1} + \frac{dm_{cv}}{dt} = 0$$

n 个组分
 n 个方程

稳态系统的质量守恒方程:

$$q_{m2} = q_{m1} \quad \text{or} \quad \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

★ 连续性方程
★ 流动问题分析基本方程

$$v_m \text{ — 平均速度: } v_m = \frac{q_m}{\rho A} = \frac{1}{\rho A} \iint_A \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

不可压缩流体的稳态流动:

$$q_{v2} = q_{v1} \quad \text{or} \quad v_1 A_1 = v_2 A_2$$

8. 化学反应系统的质量衡算方程(不考)

(3) 化学反应系统的质量衡算方程

基于千克质量单位: 组分 i 的质量生成率: \dot{R}_i (kg/s)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{反应物: } \dot{R}_i < 0 \\ \text{生成物: } \dot{R}_i > 0 \end{array} \right.$

$$q_{m2,i} - q_{m1,i} - \dot{R}_i + \frac{dm_{cv,i}}{dt} = 0 \quad \text{且} \quad \sum \dot{R}_i = 0$$

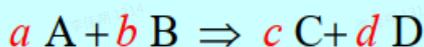
基于摩尔质量单位: 组分 i 的摩尔生成率: \dot{R}'_i (mole/s)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{反应物: } \dot{R}'_i < 0 \\ \text{生成物: } \dot{R}'_i > 0 \end{array} \right.$

用分子量 M_i (kg/kmole) 遍除上式:

$$q'_{m2,i} - q'_{m1,i} - \dot{R}'_i + \frac{dm'_{cv,i}}{dt} = 0 \quad \text{且} \quad \sum \dot{R}'_i \neq 0$$

各组份生成率计算:



$$-\frac{\dot{R}'_A}{a} = -\frac{\dot{R}'_B}{b} = \frac{\dot{R}'_C}{c} = \frac{\dot{R}'_D}{d} \quad \text{且} \quad \dot{R}_i = \dot{R}'_i M_i$$

9. 动量与动量流量

动量=速度×质量, ρv [kg·m/s]

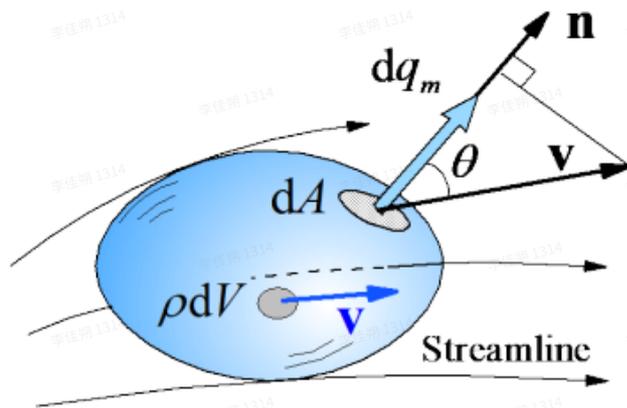
动量流量=速度×质量流量, $\rho v q_m$ [kg·m/s²]

流体微元 dV 的动量: $\rho v dV$

控制体 CV 总动量: $\iiint_{CV} \rho v dV$

通过微元面 dA 的动量流量: $\rho v d q_m = \rho v (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$

控制面净输出的动量流量: $\iint \rho v (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$



10. 控制体动量守恒方程

平均速度表达式(近似):

$$\Sigma F_x = v_{2x} q_{m2} - v_{1x} q_{m1} + \frac{d}{dt} \iiint_{CV} v_x \rho dV$$

$$\Sigma F_y = v_{2y} q_{m2} - v_{1y} q_{m1} + \frac{d}{dt} \iiint_{CV} v_y \rho dV$$

$$\Sigma F_z = v_{2z} q_{m2} - v_{1z} q_{m1} + \frac{d}{dt} \iiint_{CV} v_z \rho dV$$

稳态流动系统(近似):

$$\Sigma F_x = v_{2x} q_{m2} - v_{1x} q_{m1}$$

$$\Sigma F_y = v_{2y} q_{m2} - v_{1y} q_{m1}$$

$$\Sigma F_z = v_{2z} q_{m2} - v_{1z} q_{m1}$$

★ 流体系统
受力分析
基本工具

11. X-Y平面稳态系统的动量矩守恒方程

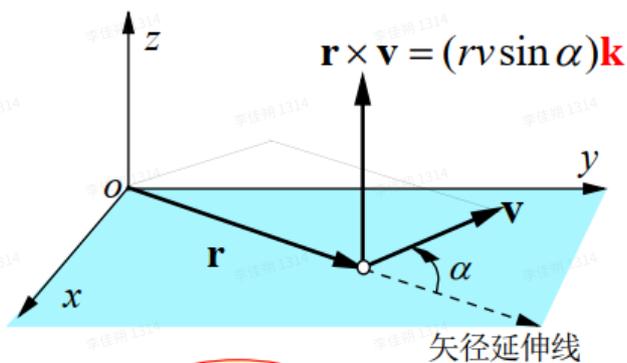
(2)x-y平面稳态系统的动量矩方程

稳态系统动量矩守恒方程:

$$\Sigma M = \iint_{cs} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

对于x-y平面系统, 如图

$$\Sigma M = \Sigma M_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \times \mathbf{v} = (rv \sin \alpha) \mathbf{k}$$



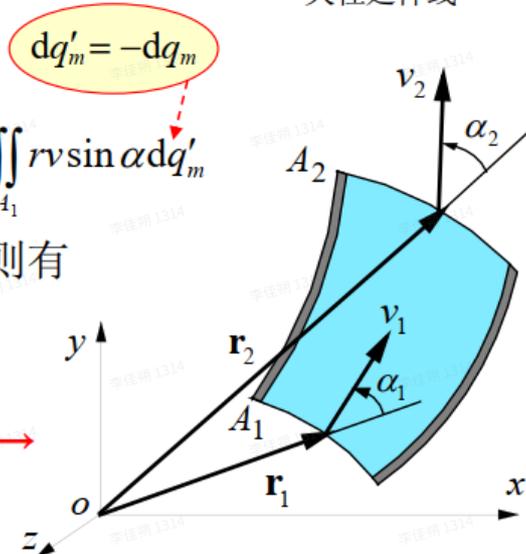
x-y平面稳态系统动量矩守恒方程:

$$\Sigma M_z = \iint_{cs} r v \sin \alpha \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \iint_{A_2} r v \sin \alpha d q_m - \iint_{A_1} r v \sin \alpha d q'_m$$

忽略进出口速度分布影响, 代之以平均速度, 则有

$$\Sigma M_z = (r_2 v_2 \sin \alpha_2 - r_1 v_1 \sin \alpha_1) q_m$$

注: α 总是由 r 延伸线逆时针转动到 v 的角度
——与力矩/动量矩逆时针转动为正的约定一致



(2)x-y平面稳态系统的动量矩方程

进、出口截面有两个分速度的情况:

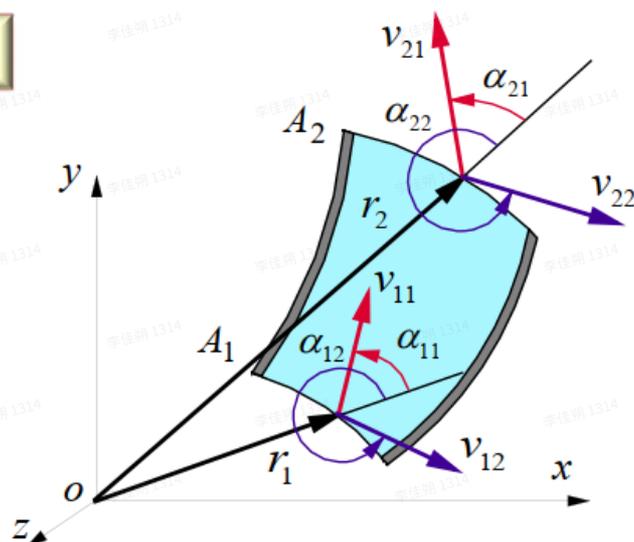
进口: $v_{11}, \alpha_{11}; v_{12}, \alpha_{12};$

出口: $v_{21}, \alpha_{21}; v_{22}, \alpha_{22};$

∴ 合速度的矩=分速度矩之和, 所以

$$r_1 v_1 \sin \alpha_1 = r_1 v_{11} \sin \alpha_{11} + r_1 v_{12} \sin \alpha_{12}$$

$$r_2 v_2 \sin \alpha_2 = r_2 v_{21} \sin \alpha_{21} + r_2 v_{22} \sin \alpha_{22}$$



于是根据 $\Sigma M_z = (r_2 v_2 \sin \alpha_2 - r_1 v_1 \sin \alpha_1) q_m$

★ 应用于旋转系统流体受力分析

有 $M_z = r_2 (v_{21} \sin \alpha_{21} + v_{22} \sin \alpha_{22}) q_{m2} - r_1 (v_{11} \sin \alpha_{11} + v_{12} \sin \alpha_{12}) q_{m1}$

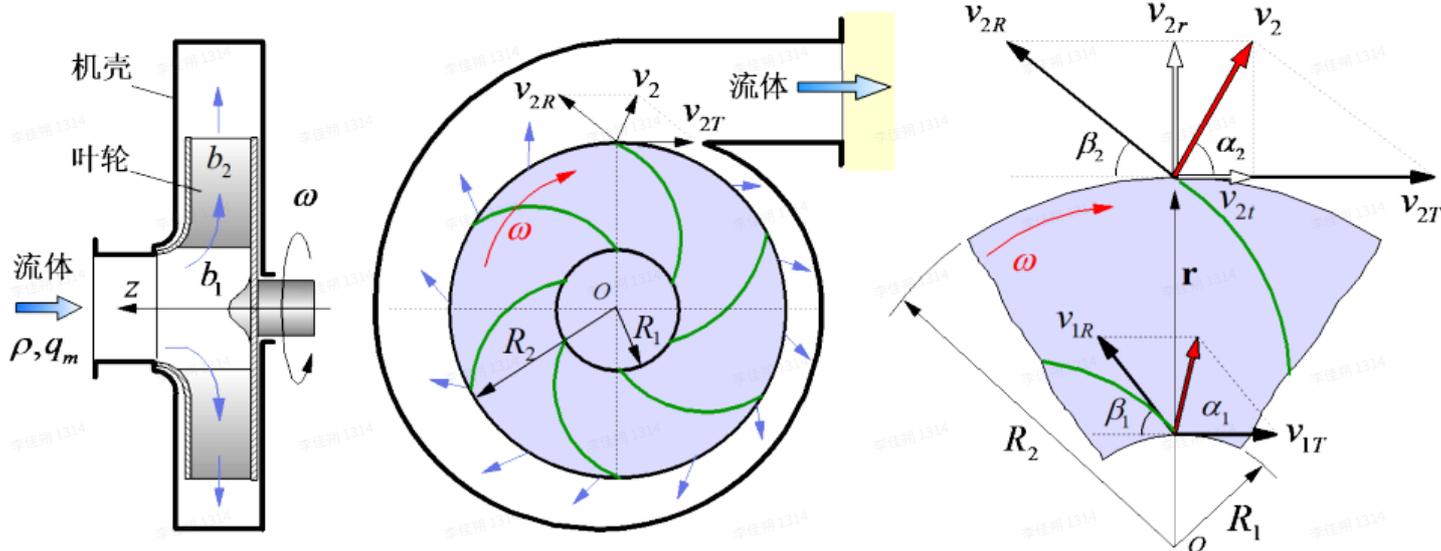
其中: α 总是由 r 延伸线逆时针转动到 v 的角度(如图)

12. 离心泵叶轮的输出力矩

① 叶轮进、出口截面的几何参数:

进口截面: 半径 R_1 、宽度 b_1 , 面积 $A_1 = 2\pi R_1 b_1$, 叶片进口安装角 β_1 ;

出口截面: 半径 R_2 、宽度 b_2 , 面积 $A_2 = 2\pi R_2 b_2$, 叶片出口安装角 β_2 ;



②叶轮进、出口截面上的速度及其相互关系:

出口截面: 相对速度 v_{2R} (沿 β_2 方向), 牵连速度 v_{2T} (叶轮切向)
绝对速度 v_2 (切向角 α_2) \rightarrow 径向分量 v_{2r} , 切向分量 v_{2t}

已知流量 q_m 与转速 ω , 可直接确定的速度有:

$$v_{2T} = R_2\omega, \quad v_{2r} = q_m / (A_2\rho)$$

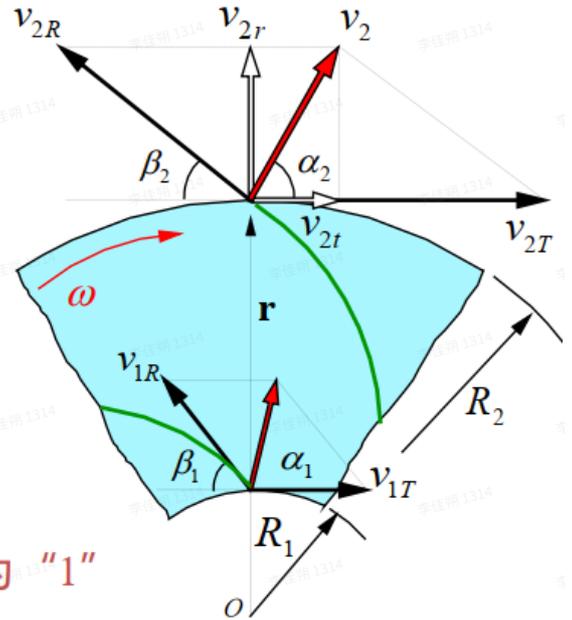
其余速度可由以下关系确定(见图):

$$v_{2R} \sin \beta_2 = v_{2r} \quad \rightarrow \quad v_{2R} = \frac{v_{2r}}{\sin \beta_2} = \frac{q_m}{\rho A_2 \sin \beta_2}$$

$$v_{2T} - v_{2R} \cos \beta_2 = v_{2t} \quad \rightarrow \quad v_{2t} = R_2\omega - \frac{q_m}{\rho A_2 \tan \beta_2}$$

$$\left. \begin{aligned} v_2 \sin \alpha_2 &= v_{2r} \\ v_2 \cos \alpha_2 &= v_{2t} \end{aligned} \right\} \quad \rightarrow \quad v_2 = \sqrt{v_{2r}^2 + v_{2t}^2}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{v_{2r}}{v_{2t}}$$

进口截面: 与上相似, 只需将下标 "2" 更换为 "1"



切向速度不产生流量, 法向速度产生流量。

(3)离心泵叶轮的输出力矩

③ 叶轮输出力矩——流体受到的力矩:

以 v_{2R} 、 v_{2T} 计算出口截面动量矩:

$$\begin{aligned} r_2 (v_{21} \sin \alpha_{21} + v_{22} \sin \alpha_{22}) q_m &= [v_{2R} \sin(90^\circ - \beta_2) + v_{2T} \sin 270^\circ] R_2 q_m \\ &= (v_{2R} \cos \beta_2 - v_{2T}) R_2 q_m = -v_{2t} R_2 q_m \end{aligned}$$

将下标 "2" 换为 "1", 可得进口截面动量矩:

$$r_1 (v_{11} \sin \alpha_{11} + v_{12} \sin \alpha_{12}) q_m = (v_{1R} \cos \beta_1 - v_{1T}) R_1 q_m = -v_{1t} R_1 q_m$$

叶轮输出力矩: 根据平面系统动量矩方程可得:

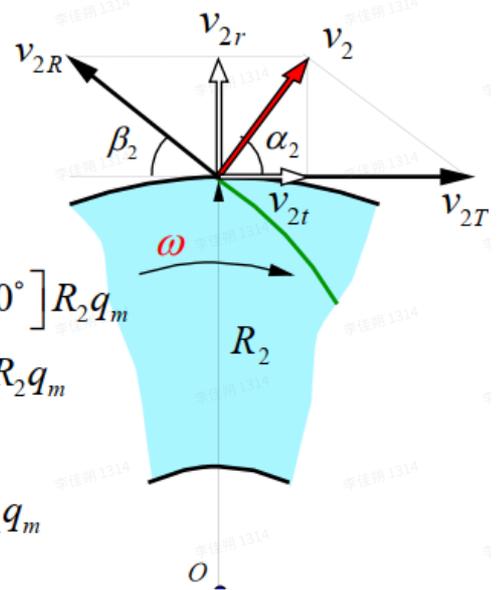
$$M_z = (v_{2R} \cos \beta_2 - v_{2T}) R_2 q_m - (v_{1R} \cos \beta_1 - v_{1T}) R_1 q_m = -(v_{2t} R_2 - v_{1t} R_1) q_m$$

即

$$M_z = \left(\frac{q_m}{\rho A_2 \tan \beta_2} - R_2 \omega \right) R_2 q_m - \left(\frac{q_m}{\rho A_1 \tan \beta_1} - R_1 \omega \right) R_1 q_m$$

叶轮输出功率 N_s 与压头(扬程) H_s :

$$N_s = M_z \omega, \quad H_s = \frac{N_s}{g q_m} = \frac{M_z \omega}{g q_m}$$



法向速度不产生动量矩，切向速度产生动量矩，且力矩方向垂直纸面向内，即Z轴负向。

扬程单位为m，相当于 N_s 功率能使水流上升的高度 H_s 。

13. 运送流体的能量

(1) 储存能——内能，动能，位能 [J or J/kg]

单位质量流体的储存能： $e = u + \frac{v^2}{2} + gz$

理想气体： $\Delta u = c_v \Delta T$

单相液体： $\Delta u = c_v \Delta T \approx c_p \Delta T$

等温过程： $\Delta u = 0$

(2) 迁移能——热量，功量 [J/s or W]

热流量 \dot{Q} 系统吸热 $\rightarrow \dot{Q} > 0$

功率 \dot{W} 系统对外做功 $\rightarrow \dot{W} > 0$

包括：热传导，壁面对流，辐射，热生成，但不包括流体自带内热能。

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_\mu + \dot{W}_p$$

轴功率：对流体机械做功

粘性功率：克服表面粘性力做功

理想流体流动： $\dot{W}_\mu = 0$

固定壁面，充分发展流动横截面： $\dot{W}_\mu = 0$

流动功率：克服静压力做功

CS 净输出的流动功率：

$$\dot{W}_p = \iint_{cs} \frac{p}{\rho} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

p/ρ ：单位质量流体的压力能

表面力 (对照 $\mathbf{p}_n = (-p + \Delta\sigma_n)\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n$)

记忆流动功率： $pdA = F$ ， $W = Fv$ ， $W_{\text{有效}} = W \cdot \vec{n}$

(3) 运动流体动能、位能、压力能的组合→机械能

$$\left(\begin{array}{l} \text{单位质量流} \\ \text{体的机械能} \end{array} \right) = \overbrace{\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}}^{\text{总位能}} = \underbrace{\frac{p}{\rho}}_{\text{压力能}} + \underbrace{gz}_{\text{位能}} + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\text{动能}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{单位重量流} \\ \text{体的机械能} \end{array} \right) = \overbrace{\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g}}^{\text{总位头}} = \underbrace{\frac{p}{\rho g}}_{\text{静压头}} + \underbrace{z}_{\text{位头}} + \underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\text{速度头}}$$

14. 充分发展流动横截面上总位能处处相等

充分发展流动截面上压力满足静力学方程，即

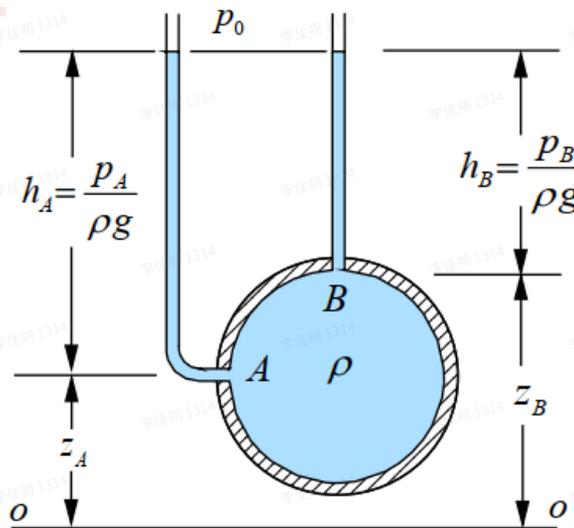
$$p_A = p_B + \rho g(z_B - z_A) \rightarrow p_A / \rho g + z_A = p_B / \rho g + z_B$$

$$\therefore \frac{p}{\rho g} + z = \text{const} \quad \text{or} \quad \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}$$

即：沿同一截面， p/ρ 与 gz 各自都会变化，但两者之和不变 (见右图： $h_A + z_A = h_B + z_B$)

应用：若CV进出口截面为等直径管流截面，则

$$\iint_A \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \pm \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) q_m$$



15. 圆管流动的平均动能

结论：对于圆管流动，若无特殊要求，可直接用 $v_m^2/2$ 表示流动截面单位质量流体的平均动能；这种替代对理想流动无误差，对湍流误差很小，对层流虽有误差，但因层流动能相对很小，其误差对总能计算并无显著影响。

16. 控制体能量守恒方程

通过控制面的能量流量 (储存能)

通过微元面 dA 的能量流量： $e dq_m = e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$

控制面净输出的能量流量： $\iint_{CS} e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$

控制体内的总储存能： $E_{cv} = \iiint_{cv} e \rho dV$

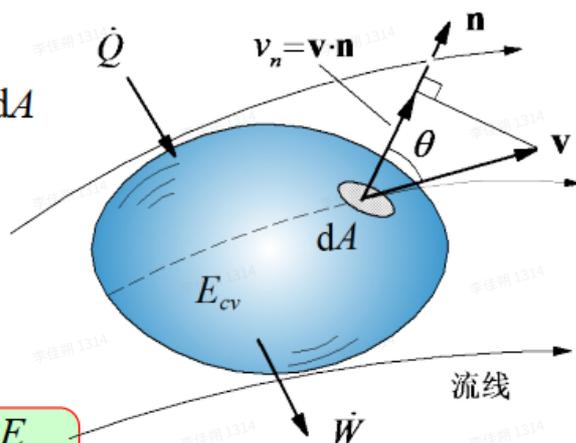
控制体能量守恒积分方程：

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE}{dt} \Big|_{\text{系统}} \rightarrow \dot{Q} - \dot{W} = \iint_{CS} e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{dE_{cv}}{dt}$$

因为： $e = u + \frac{v^2}{2} + gz$, $\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_\mu + \dot{W}_p$, $\dot{W}_p = \iint_{cs} \frac{p}{\rho} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$

所以： $\dot{Q} - \dot{W}_s = \iint_{CS} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{dE_{cv}}{dt} + \dot{W}_\mu$

其中： $E_{cv} = \iiint_{cv} e \rho dV = \iiint_{cv} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho dV$



能量守恒方程一般形式

★ 流体流动系统的能量转化关系
★ 应用于流体系统能量衡算

17. 控制体能量守恒方程的典型应用形式

控制体能量守恒方程的典型应用形式

一般形式

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \iint_{CS} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{dE_{cv}}{dt} + \dot{W}_\mu$$

展开形式

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \iint_{A_2} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dq_m - \iint_{A_1} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dq'_m + \frac{dE_{cv}}{dt} + \dot{W}_\mu$$

$$dq'_m = -dq_m$$

进出口内能、机械能积分
用进出口截面平均值替代

只考虑机械能项
忽略或无热能项

机械能守恒方程
(伯努利方程)

化工流动系统
能量守恒方程

只考虑热能项
忽略或无机械能

热平衡方程
(热量衡算方程)

18. 化工流动系统能量方程

已知

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \iint_{A_2} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dq_m - \iint_{A_1} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dq'_m + \frac{dE_{cv}}{dt} + \dot{W}_\mu$$

控制体：截面 A_1, A_2 之间的流场空间

控制面：CS = $A_1 + A_2 +$ 静止壁面

A_1, A_2 为等径管流截面

① 整个控制面上： $\dot{W}_\mu = 0$

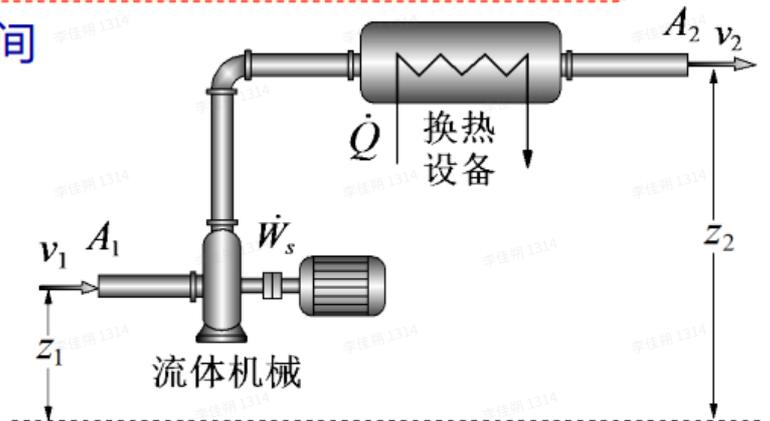
∴ 静止壁面： $\dot{W}_\mu = 0, A_1, A_2: \dot{W}_\mu = 0$

② A_1, A_2 截面上： \cong 充分发展

$$\therefore \iint_A \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) dq_m = \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) q_m \quad \text{且} \quad \iint_A \frac{v^2}{2} dq_m = \frac{\alpha v_m^2}{2} q_m, \quad \iint_A u dq_m = u_m q_m$$

化工流动系统能量守恒方程(一般形式)

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \left(u_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) q_{m2} - \left(u_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) q_{m1} + \frac{dE_{cv}}{dt}$$



$$\dot{Q} - \dot{W}_s = (u_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho})q_{m2} - (u_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho})q_{m1} + \frac{dE_{cv}}{dt} \quad [\text{J/s or W}]$$

不可压缩稳态流动系统: $\rho = \text{const}$, $q_{m1} = q_{m2} = q_m$, $dE_{cv}/dt = 0$

$$\frac{\dot{Q} - \dot{W}_s}{q_m} = (u_2 - u_1) + \frac{(\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2)}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{(p_2 - p_1)}{\rho} \quad [\text{J/kg}]$$

无热、功传递的稳态流动过程: $\dot{Q} = 0$, $\dot{W}_s = 0$

$$u_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} = u_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \quad [\text{J/kg}]$$

引入单位质量流体的焓: $i = u + p/\rho$, 上式通常又表示为

$$i_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + gz_2 = i_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} + gz_1 \quad [\text{J/kg}]$$

需要指出: 能量方程应用于加热/冷却过程时, 流体机械能项通常可忽略(简化成热平衡方程); 但对于充/放气过程, 通常只能忽略动能和位能。

19. 伯努利方程

1. 无热, 无功, 理想, 不可压缩, 稳态流动

即: 此条件下的能量守恒方程简化为:

$$\iint_{CS} (\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad \text{或} \quad \iint_{CS} e_M (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

单位质量流体的机械能

可见: 此条件下的能量守恒只涉及流体的机械能——动能, 位能, 压力能

$$e_M = (\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho})$$

2. 沿流线的伯努利方程

即: $de_M = 0 \rightarrow e_M = C$ ← 沿流线流体机械能守恒, C 值不同表示不同流线机械能可不相同

由此可知, 同一流线上的任意两点有:

$$e_{M1} = e_{M2}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \quad \text{or} \quad \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

此即沿流线的伯努利方程——无热功传递、理想不可压缩稳态流动中, 同一流线上流体的动能、位能、压力能可相互转换, 但三者之和恒定。

3. 控制体的伯努利方程

即

$$e_{M2} = e_{M1}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \quad \text{or} \quad \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

控制体伯努利方程 vs 沿流线的伯努利方程

相同之处：形式一样，五个条件一样。不同之处：控制体方程要求进出口截面处于等直径管段（这样才有截面各点 e_M 相等，进而才有 $e_{M1} = e_{M2}$ ）。

应用：伯努利方程要求的5个条件中，无热/功/稳态/不可压缩条件，很多工程实际问题都能基本满足，在此条件下，只要粘性导致的摩擦耗散不显著或可以忽略，即可应用伯努利方程作为分析工具。

20. 黏性流体伯努利方程

对于粘性流动，摩擦耗散将导致机械能损失(阻力损失)，从而使得出口机械能减小，即 $e_{M2} < e_{M1}$ ；记单位重量流体的阻力损失为 h_f [m]，则此时的能量守恒可表示为 $e_{M1} = e_{M2} + gh_f$ ，即

$$\alpha_1 \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + gh_f \quad \text{or} \quad \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f$$

★此即引申的伯努利方程，仍要求进出口截面为等径管段且 \perp 流动方向
★因粘性作用，截面上速度分布不再均匀，故方程中的动能项为截面平均动能，机械能 e_M 也是截面平均机械能；

21. 机械能守恒方程

从机械能角度，轴功也属机械能，若特别用 N 表示流体机械输入功率 $-\dot{W}_s$ ，则引申的伯努利方程可进一步扩展用于有轴功输入的流体系统：

$$\frac{N}{q_m g} = \frac{(\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2)}{2g} + (z_2 - z_1) + \frac{(p_2 - p_1)}{\rho g} + h_f$$

★流体系统机械能守恒方程

22. 机械能守恒方程 vs 化工稳态流动能量方程

$$(A) \quad \frac{N}{q_m} = \frac{(\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2)}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{(p_2 - p_1)}{\rho} + gh_f$$

适用于仅有流动摩擦耗散热的稳态流动系统

$$(B) \quad \frac{N}{q_m} = \frac{(\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2)}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{(p_2 - p_1)}{\rho} + \Delta u - \frac{\dot{Q}}{q_m}$$

适用于除摩擦热外还有其它热源的稳态流动系统

★两者关系：一般而言，方程B适用于 $Q \neq 0$ 的稳流系统，方程A则用于 $Q = 0$ 的稳流系统，故方程B更广泛，方程A只是方程B的特例。因此，在方程A适用的条件下，方程B也适用，且结果应该一致，故相同条件下两式对比必然有

$$gh_f = \Delta u + (-\dot{Q}/q_m)$$

★等式意义：①指明了 gh_f 的存在形式——热能；②指明了 gh_f 的去向——部分用于增加流体内能，部分用于系统散热；若系统绝热则 $gh_f = \Delta u$ ，若系统等温则 $gh_f = -Q/q_m$ 。

★方程A的实际应用条件：仅有流动摩擦热的稳态系统，并非严格的 $Q = 0$ 系统；其优点是：对于管路系统， gh_f 可通过阻力系数直接确定；此时若用方程B，则必须确定 gh_f 用于增加内能和散热的比例，这在一般情况下显然是困难的。

★方程B的应用条件：有外加热源($Q \neq 0$)的情况；此时理论上还需考虑 gh_f 的分配问题，但在 $Q \neq 0$ 的系统中， $gh_f \ll Q$ ，通常忽略不计，其分配比例问题自然也不在考虑之列。

23. 阻力损失

阻力损失： h_f 是单位重量流体因摩擦耗散损失的机械能，在不可压缩流动中， h_f 指的是其中的压力能损失，故也称为压头损失。

所谓“损失”是指流体压力能因摩擦耗散为热能后再不能恢复为压力能，是能量品质而不是数量的损失；损失的压力能变成热能，能量依然守恒。

阻力损失的本质： h_f 是单位重量流体因摩擦耗散产生的热能，或简称耗散热。

阻力损失的计算：对于管路系统， h_f 包括沿程摩擦损失和局部阻力损失，即

阻力损失：沿程摩擦损失 + 局部阻力损失

管路系统 h_f 计算公式：

$$h_f = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad h_f = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

其中： λ —摩擦阻力系数，管内层流： $\lambda = \frac{64}{Re}$ ，湍流： $\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}}$ ($Re < 10^5$)

ζ —局部阻力系数，可由相关公式计算或设计手册查取。

24. 小孔流动问题

1. 小孔稳态流动

(1)小孔稳态流动

小孔流动：流体通过器壁小孔的流动。

特点： $A_0 \ll A_1$, $v_0 \gg v_1$, h 恒定 \rightarrow 流动稳定

理想流量：在1、2截面之间建立伯努利方程：

$$\frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{(p_2 - p_1)}{\rho} = 0$$

考虑： $z_2 - z_1 = -h$, $p_1 = p_2 = p_0$, $v_2^2 - v_1^2 \approx v_2^2 = v_0^2$

可得

$$v_0 = \sqrt{2gh}, \quad q_{V0} = A_0 \sqrt{2gh}$$

推广 $\rightarrow v_0 = \sqrt{2(p_1 - p_2) / \rho}$

实际流量：收缩现象(缩脉 A_{\min}) + 摩擦效应 \rightarrow 实际流速 $v < v_0$

定义：收缩系数 $C_c = \frac{A_{\min}}{A_0}$, 速度系数 $C_v = \frac{v}{v_0}$, 流量系数 $C_d = C_c C_v = \frac{\text{实际流量}}{\text{理想流量}}$

实际流量：

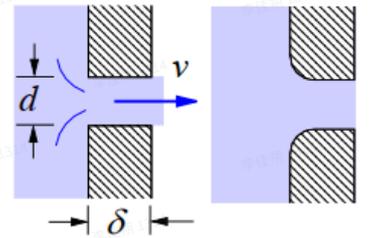
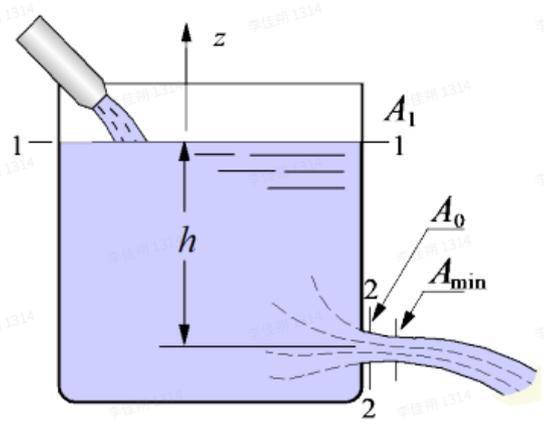
$$q_V = A_{\min} v = C_c C_v A_0 v_0 = C_d A_0 \sqrt{2gh}$$

流量系数：

$d/\delta > 1$ (薄壁容器): $C_c = 0.62, C_v = 0.98, C_d = 0.61$

$d/\delta \approx 1$ (直角内边缘): $C_c = 1, C_v = C_d = 0.86$

$d/\delta \approx 1$ (圆弧内边缘): $C_c = 1, C_v = C_d = 0.98$



2. 非稳态小孔流动

(2)非稳态小孔流动——拟稳态问题

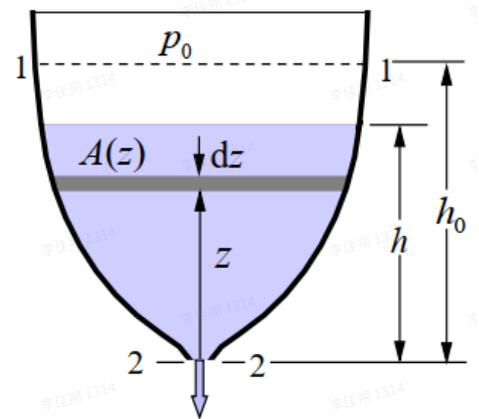
特点： $A_0 \ll A_1$, $v_0 \gg v_1$, 总体流动缓慢

流速与流量：应用非稳态质量/能量方程并忽略总体动能，有

$$v_0 = \sqrt{2gh \left(1 + \frac{(h_0 - h) \rho_g}{h \rho_L} \right)}$$

因 $\rho_g \ll \rho_L$, 所以除排放末期 ($h \ll h_0$), 上式可近似为

$$v_0 \approx \sqrt{2gh} \quad \text{or} \quad q_V = C_d A_0 \sqrt{2gh}$$



拟稳态问题

$$v_0 = v_0(t), \quad h = h(t)$$

流体排放时间：质量守恒方程： $q_{m2} - q_{m1} + dm_{cv} / dt = 0$

$$\therefore q_{m2} = \rho q_V = C_d \rho A_0 \sqrt{2gh}, \quad \frac{dm_{cv}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^h \rho A(z) dz = \rho A(h) \frac{dh}{dt}$$

$$\therefore C_d \rho A_0 \sqrt{2gh} = -\rho A(h) \frac{dh}{dt} \rightarrow t = -\frac{1}{C_d A_0 \sqrt{2g}} \int_{h_0}^h \frac{A(z)}{\sqrt{z}} dz$$

液体粘性不同对排液时间的影响归并到孔流系数 C_d 中。

25. 管流中的液体汽化问题

1. 虹吸管流动

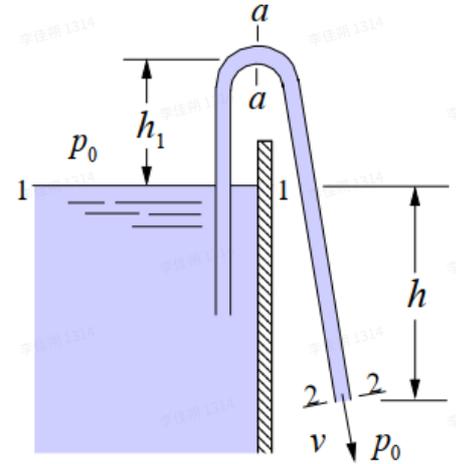
(1) 虹吸管流动

流速公式：在1、2截面之间应用引申伯努利方程有：

$$\frac{(v^2 - v_1^2)}{2g} + (z_2 - z_1) + \frac{(p_2 - p_1)}{\rho g} + h_{f,1-2} = 0$$

考虑： $z_2 - z_1 = -h$, $p_1 = p_2 = p_0$, $v^2 - v_1^2 \approx v^2$

有 $v = \sqrt{2g(h - h_{f,1-2})}$ or $v = \sqrt{2gh}$ (for $h_{f,1-2} = 0$)



汽化条件与最大流速：在1、a 截面应用引申伯努利方程, 并注意 $v_a = v$ 有

$$\frac{v_a^2}{2g} + h_1 + h_{f,1-a} + \frac{p_a - p_0}{\rho g} = 0 \rightarrow p_a = p_0 - \rho g(h_1 + h - h_{f,a-2})$$

可见： $p_a < p_0$ 且随 $(h_1 + h)$ 增加而降低，如果 $p_a \leq p_v$ (流体饱和蒸汽压)，则顶点处流体将汽化，使流动终断。由此可确定最大流速：

$$p_a = p_v \rightarrow v_{\max} = \sqrt{2g \left(\frac{p_0 - p_v}{\rho g} - (h_1 + h_{f,1-a}) \right)} \rightarrow h_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{2g} + h_{f,1-2}$$

上式表明：减小阻力损失 $h_{f,1-a}$ 或降低顶点高度 h_1 可提高最大流速。

2. 离心泵汽蚀现象与安装高度

(2) 离心泵汽蚀现象与安装高度

压差公式：在水池液面0-0与水泵进口a-a之间应用
引申伯努利方程，并取 $v_a^2 - v_0^2 \approx v_a^2 = v^2$ ，可得：

$$\frac{p_0 - p_a}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} + H_g + h_{f,0-a}$$

即：泵进口为负压 $p_a < p_0$ ，且随 H_g 增加而降低。

汽蚀现象：如果安装高度 H_g 增加使液体进口
压力 p_a 降低至 p_v ，则液体将产生汽化（空化）；气泡的产生会使泵的效率
下降并导致噪声和振动；同时，气泡随液体进入高压区后又突然凝结消失
导致液体向气泡消失真空区冲击，这种冲击会在叶轮表面产生凹坑，使其严
重损坏，此即汽蚀现象。避免汽蚀现象就需控制 H_g 。

泵的最大理论安装高度： $p_a = p_v$ 对应的安装高度 $H_{g,max}$ ，即

$$\frac{p_0 - p_v}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} + H_{g,max} + h_{f,0-a} \rightarrow H_{g,max} = H_s - \frac{v^2}{2g} - h_{f,0-a} \quad \left(H_s = \frac{p_0 - p_v}{\rho g} \right)$$

水泵允许吸上真空高度

为防止汽蚀，应使 $H_g < H_{g,max}$ ；若 $H_{g,max}$ 较小，可考虑将泵安装于液面之下。

$$H_{g,max} = H_s - \frac{v^2}{2g} - h_{f,0-a}, \quad H_s = \frac{p_0 - p_v}{\rho g}$$

工业用泵的允许吸上真空高度 H_s ：

H_s 除与 p_0 、 p_v 、 ρ 有关外，还与 n 、 q_v 有关：

$$H_s = \frac{p_0 - p_v}{\rho g} + f(n, q_v)$$

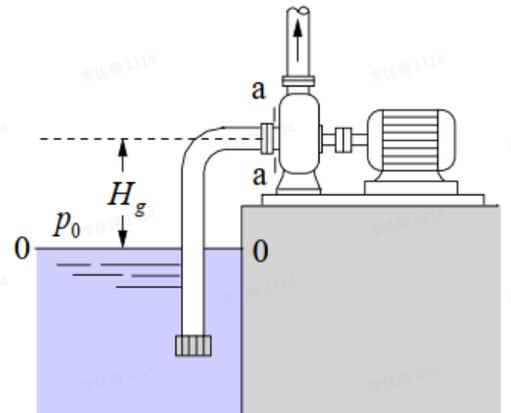
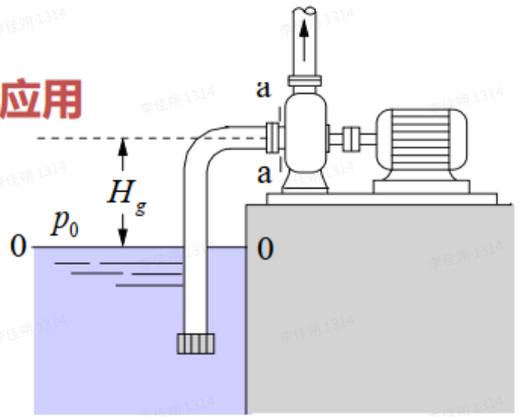
所以 H_s 由试验标定并标注于产品说明书中，其标定条件通常是：

$p_0 = 10\text{mH}_2\text{O}$ ， 20°C 的清水

工业用泵 H_s 的现场换算：若现场使用条件与上不符， H_s 需换算成新条件下的 H'_s ，考虑转速、流量等影响 $f(n, q_v)$ 不变，有：

$$H'_s = H_s + \left(\frac{p'_0}{\rho'g} - \frac{p_0}{\rho g} \right) - \left(\frac{p'_v}{\rho'g} - \frac{p_v}{\rho g} \right) \rightarrow H'_s = H_s + (H'_0 - 10) - H'_v \quad [\text{m}]$$

其中： $H'_0 = \frac{p'_0}{\rho'g}$ ， $H_0 = \frac{p_0}{\rho g} = 10(\text{m})$ ， $H'_v = \frac{p'_v}{\rho'g}$ ， $H_v = \frac{p_v}{\rho g}$



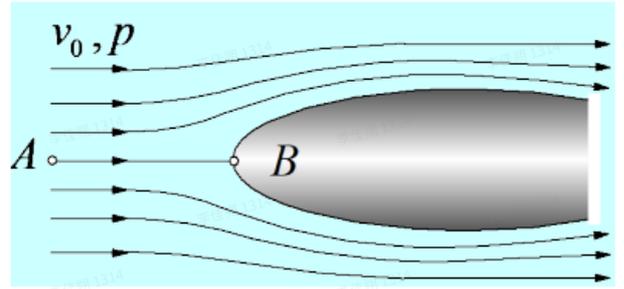
(1) 驻点、驻点压力、全压

如图：运动流体遇障碍物时，其速度滞止为零，动能转化为压力能。

驻点：速度滞止为零的点，图中B点

驻点压力：驻点B处的压力，用 P_{B0} 表示

全压力： = 动压 + 静压 = $\rho v^2 / 2 + p$



如图：设A、B两点间的摩擦阻力损失为 h_f ，有障碍物时B点处动能转化为压力能时的附加损失为 h'_f ，则在两点间应用引申的伯努利方程，有

无障碍物时： $\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g}$ **有障碍物时：** $\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} = \frac{P_{B0}}{\rho g} + h_f + h'_f$

两式对比有：

$$P_{B0} = \underbrace{\frac{\rho v_B^2}{2}}_{\text{动压}} + \underbrace{P_B}_{\text{静压}} - h'_f$$

全压

可见：一般情况下， $P_{B0} \leq$ 全压；只有在 $h'_f = 0$ 的理想情况下才有 $P_{B0} =$ 全压，此时流体动能全部转化为压力能。

27. 测压皮托管

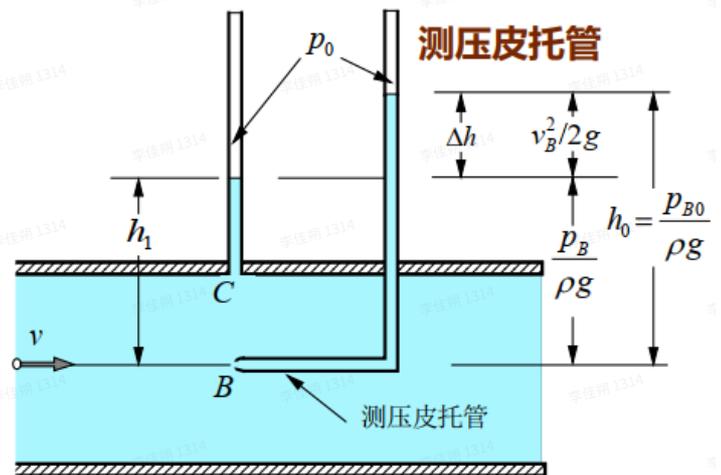
(2) 测压皮托管

$h'_f = 0$ 的理想情况下， $P_{B0} =$ 全压，即

$$\frac{P_{B0}}{\rho g} = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g}$$

测速原理式：

$$v_B = \sqrt{2g \left(\frac{P_{B0}}{\rho g} - \frac{P_B}{\rho g} \right)}$$



测压皮托管：用于测试驻点压力的直角弯曲测管，如图。

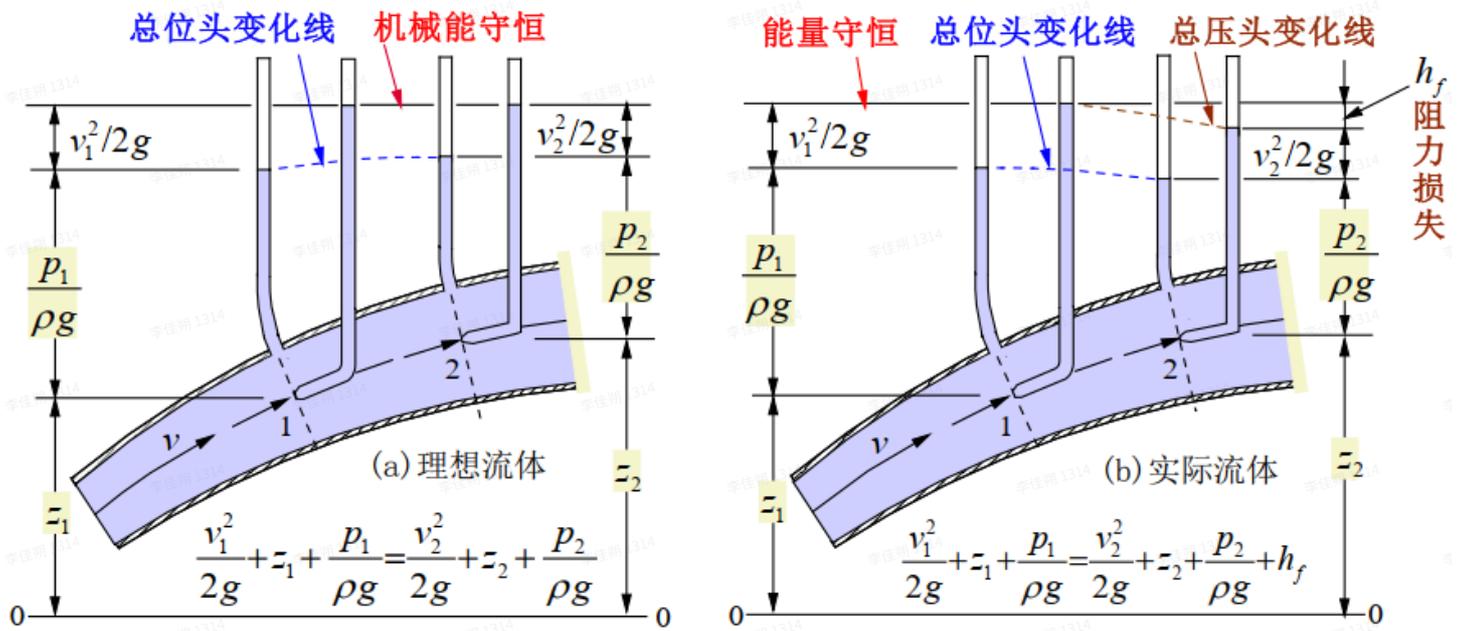
根据静力学原理，测压皮托管中B点的驻点压力 P_{B0} 和静压力 P_B 分别为

$$P_{B0} = \rho g h_0 \rightarrow \frac{P_{B0}}{\rho g} = h_0, \quad P_B = \rho g h_1 \rightarrow \frac{P_B}{\rho g} = h_1$$

测速公式：

$$v_B = \sqrt{2g \left(\frac{P_{B0}}{\rho g} - \frac{P_B}{\rho g} \right)} = \sqrt{2g(h_0 - h_1)} = \sqrt{2g\Delta h}$$

测压皮托管表现出的流体机械能转换关系（伯努利方程）：



理想流体：截面1、截面2各机械能项互不相同，但总机械能守恒；
黏性流体：截面2 总机械能小于截面1，减少部分等于阻力损失 h_f 。

28. 测速皮托管

(3)测速皮托管

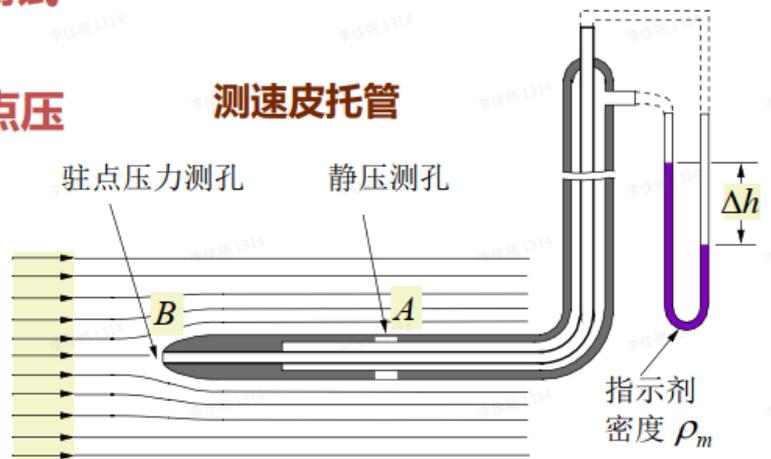
测速皮托管：将静压和驻点压力测试集于一体的弯曲测管，如图

测速公式：在测速皮托管中，驻点压力与静压之差可表示为：

$$P_{B0} - P_B \approx P_{B0} - P_A = (\rho_m - \rho)g\Delta h$$

根据：
$$v_B = \sqrt{2g \left(\frac{P_{B0}}{\rho g} - \frac{P_B}{\rho g} \right)}$$

有：
$$v_B = \sqrt{2g\Delta h \frac{(\rho_m - \rho)}{\rho}}$$



测速公式应用说明：

上述测速公式是针对理想不可压缩流体得到的，实际应用时需要修正。

- ①对于粘性流体：实际流速 $v = C_I v_B$, $C_I = 0.98 \sim 0.99$
- ②对可压缩气体：只要 $Ma < 0.1$, 上述速度修正式仍然适用, 误差较小。
- ③高马赫数流动：必须采用考虑压缩效应的测速公式。

29. 管道局部阻力问题

1. 阻力损失机理

(1) 阻力损失机理

耗散：机械能退化为热能称为耗散 (dissipation) 。

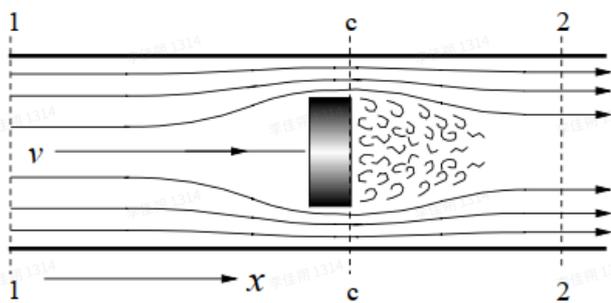
粘性耗散：流体流动过程中因粘性导致的机械能退化，有两种机理：

摩擦耗散：运动流体克服层间摩擦产生的机械能损失→沿程阻力损失机理

涡流耗散：局部涡流区的涡旋摩擦产生的机械能损失→局部阻力损失机理

局部阻力损失：流道几何形状突变局部区域内流体速度大小与方向突变产生的附加机械能损失，其本质是局部区产生的大量涡旋使机械能损耗增加。

局部阻力损失的涡流耗散机理决定了其主要部分产生于流道突变截面位置下游区域，该区域通常因流动分离有大量涡旋存在。



管内流体的节流流动

【例】左图所示节流流动中，局部阻力损失为

$$h_{f,1-2} = h_{f,1-c} + h_{f,c-2} \approx h_{f,c-2}$$

且

$$h_{f,c-2} = \frac{(v_0 - v)^2}{2g}$$

或

$$h_{f,c-2} = \zeta \frac{v^2}{2g} \rightarrow \zeta = \left(\frac{A}{A_c} - 1 \right)^2$$



v_0 对应下图中的 v_c

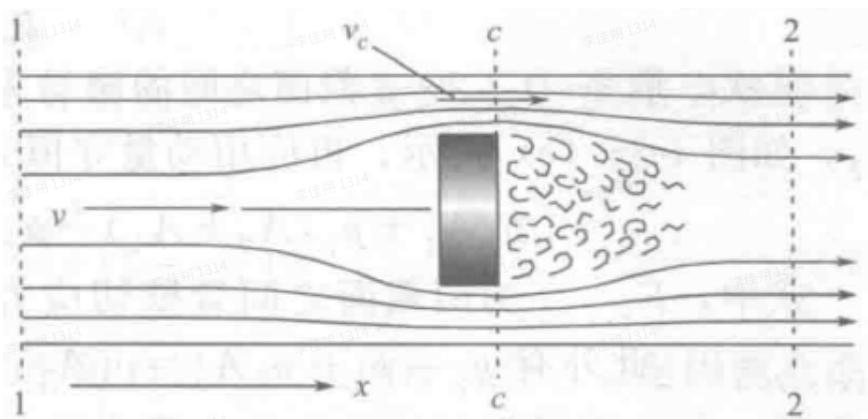
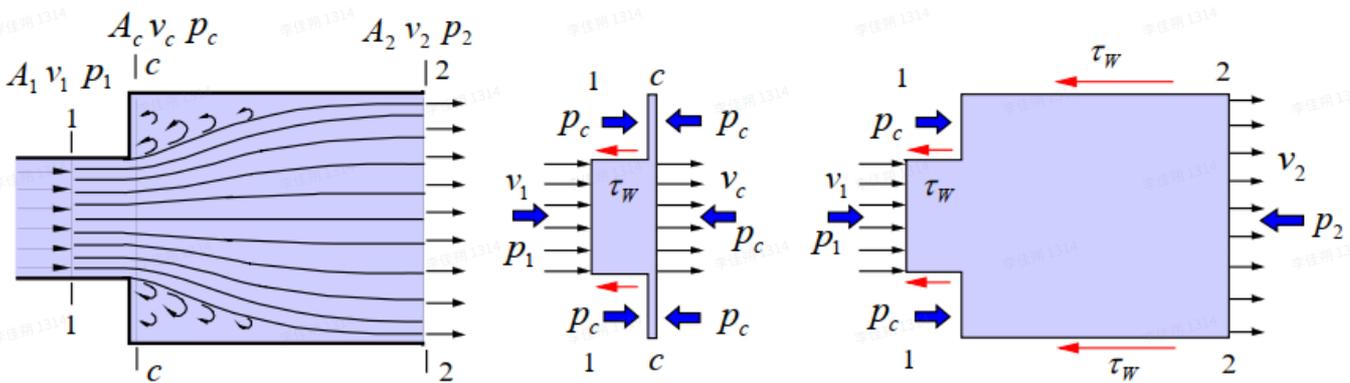


图 4-34 管内阻力件前后的流动

2. 突扩管的局部阻力损失



假设：涡流耗散 >> 壁面摩擦耗散

在1-c 截面之间应用动量守恒方程，并考虑 $q_{mc} = q_{m1}$ 有

$$P_1 A_1 + P_c (A_c - A_1) - P_c A_c - F_{\tau,1-c} = v_c q_{mc} - v_1 q_{m1} \rightarrow P_c = P_1$$

在1-2 截面之间应用动量守恒方程，并考虑 $P_c = P_1, v_2 A_2 = v_1 A_1$ 有

$$P_1 A_1 + P_c (A_2 - A_1) - P_2 A_2 - F_{\tau,1-2} = v_2^2 \rho A_2 - v_1^2 \rho A_1$$

即：

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{v_2 (v_2 - v_1)}{g} = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 - \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)$$

压头变化方程

压头变化：

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{v_2 (v_2 - v_1)}{g} = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 - \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)$$

局部阻力损失 h_f ：在1-2 截面之间应用引申的伯努利方程，并考虑 $z_2 = z_1, v_2 A_2 = v_1 A_1$ 有

$$h_f = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + (z_1 - z_2) + \frac{P_1 - P_2}{\rho g} \rightarrow h_f = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}$$

由此可见：突扩管压头变化有两个方面：①涡流耗散使压头下降(不可逆) ②流通面积扩大使流体动能转化为压力能升高压头(可逆)。

突扩管局部阻力系数： $h_f = \zeta \frac{v^2}{2g} \rightarrow \zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$ 且： $v = v_1$

特殊情况：当流体由小管进入大容器或水槽时， $A_1/A_2 \approx 0$ 故 $v_2 \approx 0$

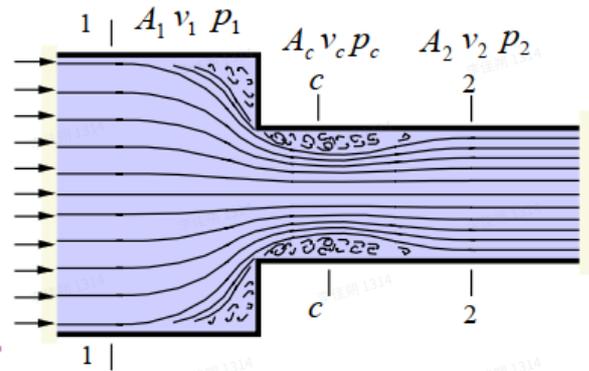
$$\zeta = 1 \rightarrow h_f = v^2 / (2g) \quad \text{(如何减小阻力损失?)}$$

💡 h_f (正数)不可逆, 剩余的 $-\frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)$ (负数)是可逆的。特殊情况下, 流体动能几乎都损失掉了。

3. 突缩管的局部阻力损失

(3)突缩管的局部阻力损失

阻力特点: 缩脉(截面c)之前加速流动, 压力能转化为动能, 阻力损失很小; 缩脉之后有效流动截面扩大, 类似于突扩管流动, 动能转化为压力能, 该过程涡流损失显著, 是突缩管局部阻力损失主要部分。



局部阻力损失: 根据突缩管局部阻力特点有

$$h_f = \frac{(v_c - v_2)^2}{2g} \rightarrow h_f = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} \rightarrow \zeta = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2 \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^{3/4}$$

其中收缩系数 $C_c = A_c/A_2 = 0.585 \sim 1$, 与 A_2/A_1 有关(见上式)。

压力降: 在1-2截面之间应用伯努利方程, 其中 h_f 主要是局部阻力损失, 有

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_f = 0 \rightarrow p_1 - p_2 = \rho g h_f + \frac{\rho v_2^2}{2} \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)$$

由此可见: 突缩管压力降包括: ①局部阻力损失产生的压降(不可逆), ②流通面积缩小、流体压力能转换为动能产生压降(可逆); 或: 突缩管压降一部分损失于涡流耗散(不可逆), 另一部分转换为动能(可逆)。

4. 孔板流量计局部阻力及流量测量

(4)孔板流量计局部阻力及流量测量

测试原理：利用孔板前后的压力差与流量的对应关系测量流量——节流型流量计。

孔板阻力损失 h_f 测试：

类似于突缩管，孔板阻力损失可表示为

$$h_f = \frac{(v_c - v)^2}{2g} = \left(\frac{v_c}{v} - 1 \right)^2 \frac{v^2}{2g}$$

定义收缩系数 $C_c = A_c/A_0$ ，且 $v_c A_c = v A$ ，有

$$\frac{v_c}{v} = \frac{A}{A_0 C_c} \rightarrow h_f = \left(\frac{A}{A_0 C_c} - 1 \right)^2 \frac{v^2}{2g} \quad \text{or} \quad \zeta = \left(\frac{A}{A_0 C_c} - 1 \right)^2$$

表明 h_f 或 ζ 的影响因素

其次，在1、2截面间应用引申伯努利方程，并根据U型管读数可得：

$$h_f = \frac{(p_1 - p_2)}{\rho g}, \quad p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho) g \Delta h_2 \rightarrow h_f = \frac{(\rho_m - \rho)}{\rho} \Delta h_2$$

h_f 测量计算式
测口位置见图

过程：在不同 Re 下测试 Δh_2 ，由测量式计算 h_f ，由影响关系式计算 C_c 或 ζ ，在不同 A/A_0 条件下进行上述测试，最后可整理出 $\zeta = f(Re, A/A_0)$ 关联式。

流量测试公式：

在1-c及1-2截面间分别应用伯努利方程有

$$\frac{p_1 - p_c}{\rho g} = \frac{v_c^2 - v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{A^2}{A_0^2 C_c^2} - 1 \right) \approx \frac{v^2}{2g} \frac{A^2}{A_0^2 C_c^2}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = h_f \quad \therefore h_f = \frac{(v_c - v)^2}{2g} \quad \therefore \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{(v_c - v)^2}{2g}$$

显然 $(p_1 - p_c) > (p_1 - p_2)$ ，故一般是通过测试 $(p_1 - p_c)$ 来确定孔板流量，因为同样流量下压差计的显示压差越大，测试误差越小。

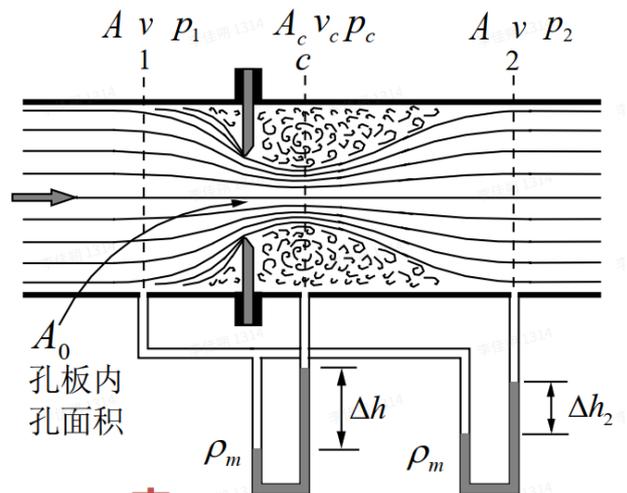
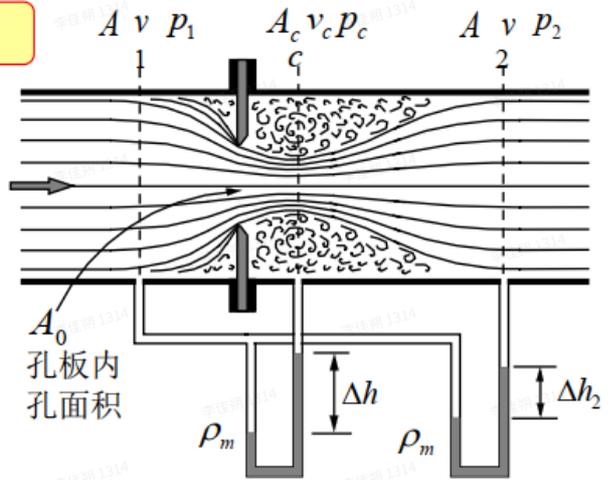
如图： $(p_1 - p_c) = (\rho_m - \rho) g \Delta h$ 将其代入上式可得孔板流量测量公式为

$$q_v = C_0 A_0 \sqrt{2g \Delta h \frac{(\rho_m - \rho)}{\rho}}$$

其它节流型流量计流量公式与此类似

C_0 称为孔流系数：是考虑 C_c 、缩脉、测孔位置影响的综合修正系数。

C_0 通过实验标定： $C_0 = f(Re, D_0/D)$ ，且 Re 超过某一数值后 $C_0 = f(D_0/D)$ （期望测量范围）。良好设计的孔板流量计， C_0 一般在0.6~0.7之间。



第四章 做题心得

1. 例4-4 注意题目要求是弯头对流体的作用力，还是流体对弯头的作用力，一般直接求得的是弯头对流体的作用力，需要反向后获得流体对弯头的作用力。
2. 例4-5 进水量与相对速度有关，而非绝对速度。
3. 4-5题 求体积流量 $q_V = Av$ ，不用乘密度。
4. 4-17题 p_1 不是力，是单位面积的力，要乘对应面积。
5. 4-21题 全压与静压

② 在截面1处，全压 $p'_1 = -150 \text{ mmH}_2\text{O}$ ，静压 $p_1 = -160 \text{ mmH}_2\text{O}$

$$\frac{p'_1}{\rho} = \frac{v_m^2}{2} + \frac{p_1}{\rho}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2(p'_1 - p_1)}{\rho}} = \frac{7\sqrt{30}}{3} = 12.78 \text{ m/s}$$



全压是流体流动时的总压力，包含静止时的静压与由于流体流动时降低的动压。

6. 4-21题 注意是 mmH_2O ，要对 mH_2O 乘 10^{-3} 。
7. 4-21题 关于有效功率与效率问题(含扬程计算)，见书中92、93页例4-11介绍(如下)

【例 4-11】 泵的输入功率计算。

如图 4-22 所示, 水在稳态下流过水泵, 流量 $q_V = 280\text{m}^3/\text{h}$, 密度 $\rho = 1000\text{kg}/\text{m}^3$, 泵的进口管直径 $D_1 = 300\text{mm}$, 出口管直径 $D_2 = 150\text{mm}$ 。实验测得水泵进口截面 1 与出口截面 2 之间的静压 U 形管指示剂高差 $h = 200\text{mmHg}$, 其中指示剂汞的密度 ρ_m 与水的密度 ρ 之比 $\rho_m/\rho = 13.6$ 。

- (1) 忽略摩擦耗散, 试确定泵输入的轴功率 N_e ;
- (2) 若由于泵内的摩擦损失, 泵的实际功率 $N = 4000\text{W}$, 试确定流体的内能增量。

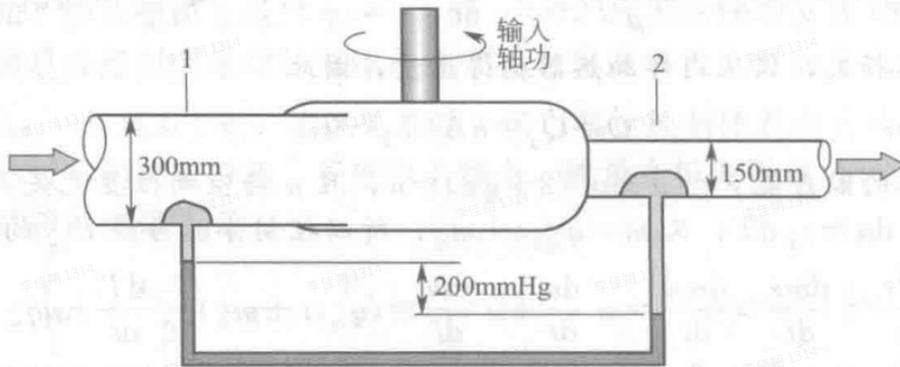


图 4-22 例 4-11 附图

解 取 1、2 截面之间的流场空间为控制体。该问题属于不可压缩流体稳态流动问题。

(1) 确定 N_e 。

在无加热/冷却装置且又忽略摩擦耗散的条件下, 必然有 $\dot{Q} = 0$ 且流动是等温过程 (即 $\Delta u = 0$); 于是根据方程式 (4-49) 并考虑 $z_2 - z_1 = 0$ 有

$$-\frac{\dot{W}_s}{q_m} = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} \quad (\text{a})$$

因为泵的输入功率 $N_e = -\dot{W}_s$ ，且

$$p_2 - p_1 = (\rho_m - \rho)gh, \quad v_2^2 - v_1^2 = q_v^2 (4/\pi)^2 (1/D_2^4 - 1/D_1^4), \quad q_m = \rho q_v$$

所以

$$N_e = -\dot{W}_s = \left[\frac{1}{2} q_v^2 \frac{4^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4} \right) + \left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right) gh \right] \rho q_v$$

代入数据得

$$N_e = -\dot{W}_s = (9.08 + 24.70) \times 77.78 = 2627.4 (\text{W})$$

(2) 确定 Δu

根据方程式 (4-49)， $z_2 - z_1 = 0$ ，且泵的实际输入功率 $N = -\dot{W}_s$ ，所以有

$$\frac{\dot{Q} + N}{q_m} = (u_2 - u_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

该式与式 (a) 比较可得

$$N - N_e = (u_2 - u_1)q_m + (-\dot{Q})$$

该结果表明：因内部摩擦所增加泵功率全部转化为热能，一部分用于增加流体内能，另一部分由泵壳向外散热。假设泵壳绝热即 $\dot{Q} = 0$ ，则摩擦消耗的功率将全部均转化为流体的内能增加量，该内能质量及其对应的流体温升为

$$\Delta u = (u_2 - u_1) = \frac{N - N_e}{q_m} = \frac{4000 - 2627.4}{77.78} = 17.65 (\text{J/kg})$$

$$\Delta T = \frac{\Delta u}{c_p} = \frac{17.64}{4180} = 0.004 (^\circ\text{C})$$

关于泵的效率与扬程的说明：泵的输入功率 N 中，实际转化为流体机械能（总压头）的部分称为有效功率 N_e ， N_e 加上容积损失（流体泄漏）、水力损失（流体摩擦）和机械损失（机械摩擦）损耗的功率才是实际输入功率 N ，两者之比称为泵的效率 η ，即 $\eta = N_e/N$ 。单位重量流体经过水泵后获得的总压头增量称为泵的扬程 H ，即

$$H = \frac{\Delta v^2}{2g} + \frac{\Delta p}{\rho g} + \Delta z$$

其与有效功率 N_e 的关系为 $N_e = gq_m H = \rho g q_v H$

8. 4-21题 扬程的转换

$$h_{f水,3-4} = 169 \text{ mm (H}_2\text{O)}$$

$$\rho_{水} g h_{f水,3-4} = \rho g h_{f,3-4}$$

$$h_{f,3-4} = \frac{\rho_{水} h_{f水,3-4}}{\rho}$$

$$= \frac{1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 169 \times 10^{-3} \text{ m}}{1.2}$$

$$= 141 \text{ m}$$

9. 4-21题 总阻力损失不只是1-4段，而是从大气中输入至输出到大气的全过程。

10. 4-23题 底边是 $(H - h) * \tan\alpha * 2$ ，不要忘乘2。

第四章 答案纠错

1. 4-19题答案纠错

$$\textcircled{1} v_1 = \sqrt{2gh_1}, v_2 = \sqrt{2gh_2}$$

$$q_v = A(v_1 + v_2), A = 0.5 \text{ cm}^2$$

$$q_m = A(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}) = 3.779 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

此处应乘以水的密度(1000 kg/m^3)

结果应为 0.3779 kg/s

2. 4-25题 我认为书中答案不精确，98上的答案和我做的一样。

$$\text{即 } h=0 \text{ 时 } t = \frac{2lab\sqrt{h_0}}{C_d(a+tb)A\sqrt{2g}} = 99.796 \text{ s} \quad \checkmark$$

第五章(教材第六章) 流体流动微分方程

1. 直角坐标系中的连续性方程

控制体质量守恒方程一般形式:

$$q_{m2} - q_{m1} + \frac{\partial m_{cv}}{\partial t} = 0$$

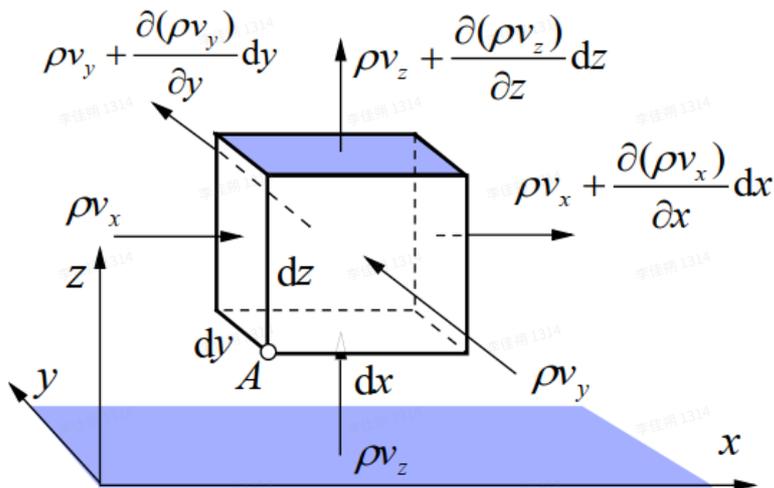
微元体质量守恒分析(见图):

输入面法向速度、质量通量:

$$v_x, v_y, v_z; \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z$$

微元体净输出的质量流量:

$$q_{m2} - q_{m1} = \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dx dy dz$$



各微元面上的质量通量

微元体的瞬时质量 → 质量变化率: $m_{cv} = \rho dx dy dz \rightarrow \frac{\partial m_{cv}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$

连续性方程: $\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ or $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

2. 不可压缩流体的连续性方程

不可压缩流体的连续性方程: $\rho = const \rightarrow D\rho/Dt = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

适合于不可压缩流体的稳态与非稳态流动

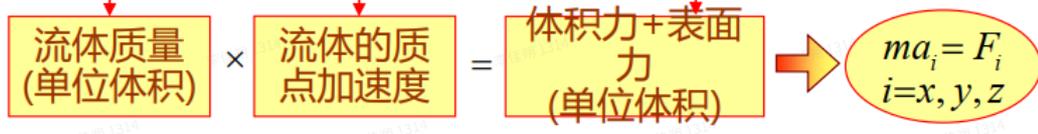
物理意义: $\nabla \cdot \mathbf{v} \rightarrow$ 流体体积应变速率。

$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \rightarrow$ 不可压缩流体运动过程中: 形状可变, 但体积不变。

3. 应力形式的运动微分方程(可用于各种流体)

应力形式的运动方程——适用于层流/湍流/牛顿/非牛顿流体

$$\begin{aligned}
 x \text{ 方向: } & \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = f_x \rho + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\
 y \text{ 方向: } & \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = f_y \rho + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\
 z \text{ 方向: } & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = f_z \rho + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}
 \end{aligned}$$



4个方程:
 3个运动方程
 1个连续性方程
 9个变量:
 3个速度分量
 6个独立应力
 v_x, v_y, v_z
 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$
 $\tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$
 $\tau_{zy} = \tau_{yz}$
 方程不封闭

4. 斯托克斯基本假设

斯托克斯 (Stokes) 基本假设: ①应力与变形速率成线性关系; ②这种关系各向同性; ③静止流场切应力为零且各正应力均等于静压力。

5. 牛顿流体本构方程

牛顿流体本构方程:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
 \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
 \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
 \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\
 \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\
 \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

本构方程讨论:

表面正应力: $\sigma_n = (-p + \Delta\sigma_n)\mathbf{n}$ 类似于泊松比

$$\Delta\sigma_n = 2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

附加正应力
 仅与线应变
 速率相关联

自身方向线
 应变率贡献

其它方向线
 应变率贡献

$$(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y + \Delta\sigma_z) = 0, (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3 = -p$$

表面切应力: 仅与剪切应变速率相关

理想流体或静止流体 ($\mu=0$ 或 $\mathbf{v}=0$):

$$\tau_{ij} = 0 (i \neq j); \Delta\sigma_n = 0, \sigma_n = -p$$

一维流动 ($v_x = v_x(y), v_y = v_z = 0$):

$$\Delta\sigma_n = 0, \sigma_n = -p; \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

牛顿剪切定律

6. N-S方程(原则上仅适用于牛顿流体的层流流动)

耐维-斯托克斯方程 (Navier-Stokes Equations, 简称N-S方程)

牛顿流体本构方程 + 应力形式的运动方程 → 粘性流体运动微分方程:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_x}{Dt} &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \nabla \cdot \mathbf{v}) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \\ \rho \frac{Dv_y}{Dt} &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] \\ \rho \frac{Dv_z}{Dt} &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

- 粘性流体流动及对流换热传质分析的基本理论工具;
- 对流体密度/粘度/可压缩性未作限制, 应用中应根据问题特点简化;
- 引入了基于层流背景的牛顿流体本构方程, 原则上仅适用于牛顿流体的层流流动。

常粘度、不可压缩流体的N-S方程: $\mu = const, \rho = const, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

N-S
方程
常见
形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

N-S方程的矢量形式/方程各项意义:

$\mu = 0 \rightarrow \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p$ 欧拉方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

$\mathbf{v} = 0$
 $\rho \mathbf{f} = \nabla p$ 静力学方程

- 非常项: 定常流动=0, 静止流场≈0
- 对流项: 静止流场=0, 蠕变流动≈0
- 源项: 单位质量流体的体积力
- 源项: 单位质量流体的压差力
- 扩散项(粘性力项): 静止或理想流体=0, 高速非边界层内≈0

7. N-S方程应用概述

N-S方程——粘性流体流动动量守恒的数学表达，有较普遍的适应性；
流体静力学方程和理想流体运动方程仅是其特例。

N-S方程的封闭性

——包括4个方程，涉及4个流动参数： v_x, v_y, v_z, p ，理论上可以求解；
——对于 ρ 和 μ 可变的情况，应寻求补充方程，如理想气体状态方程等。

N-S方程应用条件

——只适用于牛顿流体，且原则上只适用于层流流动（因为引入了基于层流背景的牛顿流体本构方程）；
——对非牛顿流体：应力形式的运动方程仍然适用。

N-S方程的求解

——必须根据实际流动问题特点对N-S方程进行简化，获得正确反映问题特征的微分方程(组)，并确定恰当的初始条件和边界条件；其中**最关键**是方程的合理简化——取决于对问题特征的正确理解和经验。
——简化后获得的微分方程，可能有解，可能无法求解，也许只能得到近似解，或通过数值计算方法获得离散解。

例题 6-1 6-2 见PPT

柱坐标、球坐标下的连续性方程，柱坐标下N-S方程不要求记忆 见PPT

作业 6-1 6-3 6-4 6-5

第六章(教材第八章)

1. 流动相似

流动相似——几何相似概念的推广，包括：

几何相似 运动相似 动力相似

1. 几何相似

几何相似——模型系统边界形状与原型相似(对应边成同一比例)

用 L_p 、 L_m 分别表示原型与模型对应的何特征尺度, 几何相似意味着:

p — prototype
 m — model

$$\frac{L_p}{L_m} = C_l$$

C_l ——长度比尺

—— $C_l \rightarrow 1$ 表示模型尺度趋近原型实际尺度。

—— 几何相似要求模型和原型之间所有对应尺度的 C_l 均相同;

—— 实践中这一要求并非总能满足, 例如:

- 对天然河道流动进行模型实验时, 如按同一比尺缩制模型, 可能会造成模型中水层太浅, 以致改变流动的性质 (不满足动力相似);
- 研究管道流动中管壁表面摩擦阻力时, 模型表面与原型表面的粗糙度相似极为重要, 但要完全满足粗糙度相似往往又有实际困难, 此时只有降低要求, 比如: 使模型与原型的平均相对粗糙度相等。

2. 运动相似

运动相似——几何相似的两流动系统中对应空间点的流线形状相似。

—— 流线形状相似意味着两系统对应点的速度 v 、加速度 $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ 相互平行, 且比值为—常数, 即:

$$\frac{v_p}{v_m} = C_v, \quad C_t = \frac{\Delta t_p}{\Delta t_m}, \quad \frac{a_p}{a_m} = \frac{(dv/dt)_p}{(dv/dt)_m} = \frac{C_v}{C_t}$$

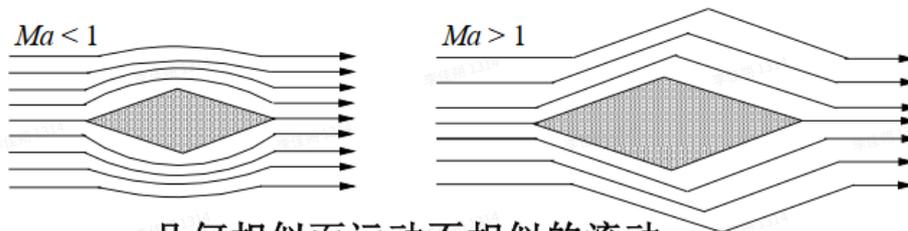
C_v ——速度比尺
 C_t ——时间比尺

即: 运动相似的两个系统必有确定的速度比尺 C_v 和时间比尺 C_t 。

—— 根据“速度=位移/时间”的关系, 又可得 C_v 、 C_l 、 C_t 的关系为:

$$C_v = \frac{C_l}{C_t} \quad \text{or} \quad \frac{C_v C_t}{C_l} = 1 \quad \text{or} \quad C_t = \frac{C_l}{C_v} \quad (\text{时间比尺方程})$$

即: 两系统运动相似 (C_v 、 C_t 确定), 则长度比尺 C_l 也确定。这意味着几何相似是运动相似的必要条件, 即运动相似必然几何相似。反之则不一定, 比如



几何相似而运动不相似的流动

3. 动力相似(含边界条件和初始条件)

动力相似——两个几何相似、运动相似的流动系统中，对应空间点同性质作用力 F 的方向相同、大小成一定比例，即：

$$\frac{F_p}{F_m} = C_f$$

C_f ——作用力比尺

——动力相似要求在两个流场中任意对应点 C_f 都保持一致。

流动相似的三点说明：

——两系统流动相似，除满足几何相似、运动相似、动力相似外，其边界条件和初始条件也应保持相似。

——相似原理仅说明两个系统流动相似必须在几何、运动和动力三个方面都要相似。但相似原理通常并不直接用于检验模型实验系统是否与原型相似，因为设计模型系统时并不知道流动的详情。

——如何保证设计的模型系统与原型系统流动相似？这是由相似准则来解决的问题。

2. 相似准则与建立

相似准则——流动相似的充分必要条件。

建立相似准则的两种途径

——**微分方程法**：要求知道描述流动系统的微分方程；

——**量纲分析法**：要求知道影响流动过程的物理参数。

3. N-S方程的相似分析

(1) N-S方程的相似分析

——分析 N-S 方程可导出 粘性不可压缩流动问题的相似准则;

——用微分方程可导出的 相似准则数目=非同类项的数目-1;

以z 方向运动方程为例, 用下标 p 、 m 分别标志原型与模型参数, 有:

$$\frac{\partial v_{pz}}{\partial t_p} + v_{px} \frac{\partial v_{pz}}{\partial x_p} + v_{py} \frac{\partial v_{pz}}{\partial y_p} + v_{pz} \frac{\partial v_{pz}}{\partial z_p} = -g_p - \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z_p} + \frac{\mu_p}{\rho_p} \left(\frac{\partial^2 v_{pz}}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2 v_{pz}}{\partial y_p^2} + \frac{\partial^2 v_{pz}}{\partial z_p^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_{mz}}{\partial t_m} + v_{mx} \frac{\partial v_{mz}}{\partial x_m} + v_{my} \frac{\partial v_{mz}}{\partial y_m} + v_{mz} \frac{\partial v_{mz}}{\partial z_m} = -g_m - \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p_m}{\partial z_m} + \frac{\mu_m}{\rho_m} \left(\frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial y_m^2} + \frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial z_m^2} \right)$$

相似准则数目 = 5 - 1 = 4

非同类项的数目为红框数目(5), 每个红框内为同类项, 互相为非同类项

6

$$\frac{\partial v_{pz}}{\partial t_p} + v_{px} \frac{\partial v_{pz}}{\partial x_p} + v_{py} \frac{\partial v_{pz}}{\partial y_p} + v_{pz} \frac{\partial v_{pz}}{\partial z_p} = -g_p - \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z_p} + \frac{\mu_p}{\rho_p} \left(\frac{\partial^2 v_{pz}}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2 v_{pz}}{\partial y_p^2} + \frac{\partial^2 v_{pz}}{\partial z_p^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_{mz}}{\partial t_m} + v_{mx} \frac{\partial v_{mz}}{\partial x_m} + v_{my} \frac{\partial v_{mz}}{\partial y_m} + v_{mz} \frac{\partial v_{mz}}{\partial z_m} = -g_m - \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p_m}{\partial z_m} + \frac{\mu_m}{\rho_m} \left(\frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial y_m^2} + \frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial z_m^2} \right)$$

根据相似原理, 两相似系统同名物理量之比应满足同一比尺, 即:

几何相似: $C_l = \frac{x_p}{x_m} = \frac{y_p}{y_m} = \frac{z_p}{z_m}$ 运动相似:

$$C_v = \frac{v_{px}}{v_{mx}} = \frac{v_{py}}{v_{my}} = \frac{v_{pz}}{v_{mz}}, \quad C_t = \frac{t_p}{t_m}$$

动力相似: $C_p = \frac{p_p}{p_m}$, $C_g = \frac{g_p}{g_m}$ 其它相似:

$$C_\rho = \frac{\rho_p}{\rho_m}, \quad C_\mu = \frac{\mu_p}{\mu_m} \text{ or } C_v = \frac{V_p}{V_m}$$

根据以上相似比尺, 可将原型参数用模型参数表达如下:

$$x_p = C_l x_m, \quad \dots, \quad v_{px} = C_v v_{mx}, \quad \dots, \quad t_p = C_t t_m, \quad \dots, \quad p_p = C_p p_m, \quad \dots,$$

并将其代入原型系统 N-S 方程可得:

**原型系统N-S方程
(引入比尺变换后)**

$$\frac{C_V}{C_t} \frac{\partial v_{mz}}{\partial t_m} + \frac{C_V^2}{C_l} \left(v_{mx} \frac{\partial v_{mz}}{\partial x_m} + v_{my} \frac{\partial v_{mz}}{\partial y_m} + v_{mz} \frac{\partial v_{mz}}{\partial z_m} \right)$$

模型系统N-S方程

$$= -C_g g_m - \frac{C_p}{C_l C_\rho} \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p_m}{\partial z_m} + \frac{C_V C_\mu}{C_l^2 C_\rho} \frac{\mu_m}{\rho_m} \left(\frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial y_m^2} + \frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial z_m^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_{mz}}{\partial t_m} + v_{mx} \frac{\partial v_{mz}}{\partial x_m} + v_{my} \frac{\partial v_{mz}}{\partial y_m} + v_{mz} \frac{\partial v_{mz}}{\partial z_m} = -g_m - \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p_m}{\partial z_m} + \frac{\mu_m}{\rho_m} \left(\frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial y_m^2} + \frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial z_m^2} \right)$$

变换后原型方程中的模型参数是由相似比尺引入的，变化后方程解得的模型参数必然与模型方程本身的解相同，否则，比尺关系引入的模型变量就不真正代表模型变量，只是用了与模型变量相同的符号而已，即两系统相似的假设并不成立。什么样的条件下两方程有相同的解呢？

比较可见：只要各比尺项满足下列条件，两方程的解必然相同

$$\frac{C_V}{C_t} = \frac{C_V^2}{C_l} = C_g = \frac{C_p}{C_l C_\rho} = \frac{C_V C_\mu}{C_l^2 C_\rho} \quad \text{or} \quad \frac{C_V C_l C_\rho}{C_\mu} = \frac{C_p}{C_\rho C_V^2} = \frac{C_V^2}{C_l C_g} = \frac{C_l}{C_t C_V} = 1$$

同时除此项

4. 粘性不可压缩流动问题的相似准则与相似准数

$$\frac{C_V C_l C_\rho}{C_\mu} = \frac{C_p}{C_\rho C_V^2} = \frac{C_V^2}{C_l C_g} = \frac{C_l}{C_t C_V} = 1$$

根据N-S导出的粘性不可压缩流动问题的相似准则，可获得4个相似准数：

$\frac{C_V C_l C_\rho}{C_\mu} = 1 \rightarrow \frac{L_p v_p \rho_p}{\mu_p} = \frac{L_m v_m \rho_m}{\mu_m} = \text{Re},$	$\text{Re} = \frac{L v \rho}{\mu}$	雷诺准数
$\frac{C_p}{C_\rho C_V^2} = 1 \rightarrow \frac{p_p}{\rho_p v_p^2} = \frac{p_m}{\rho_m v_m^2} = \text{Eu},$	$\text{Eu} = \frac{p}{\rho v^2}$	欧拉准数
$\frac{C_V^2}{C_l C_g} = 1 \rightarrow \frac{v_p^2}{g_p L_p} = \frac{v_m^2}{g_m L_m} = \text{Fr},$	$\text{Fr} = \frac{v^2}{gL} \text{ or } \frac{v}{\sqrt{gL}}$	佛鲁德准数
$\frac{C_l}{C_t C_V} = 1 \rightarrow \frac{L_p}{v_p t_p} = \frac{L_m}{v_m t_m} = \text{St},$	$\text{St} = \frac{L}{vt}$	斯特哈尔准数

根据上述相似准则可知：对于粘性不可压缩流体的流动问题，模型系统要与原型系统相似，必须保证两系统的相似准数Re、Eu、Fr、St对应相等，且两系统应有相似的边界条件和初始条件。

需要指出：实际问题多数不能同时满足所有相似准数，只能根据流动问题特征，选择满足主要相似准数相等。

5. N-S方程(z方向)各项的力学意义

N-S方程（z方向）各项的力学意义：

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

惯性力_t	惯性力_x	重力	压力	粘性力
$\rho v/t$	$\rho v^2/L$	ρg	p/L	$\mu v/L^2$

6. 常见相似准数与意义



前四个是粘性不可压缩流动问题的相似准数。

1. 雷诺准数 Re

雷诺准数 Re — Reynolds number

$$Re = \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho v^2/L}{\mu v/L^2} = \frac{\rho v L}{\mu}$$

雷诺准数 Re 表征流动问题中粘性力作用的影响——粘性阻力相似准数。凡粘性流体对流问题(动量及热质传递)，应首先考虑满足雷诺相似准则。

2. 欧拉准数 Eu

欧拉准数 Eu — Euler number

$$Eu = \frac{\text{压力}}{\text{惯性力}} = \frac{p/L}{\rho v^2/L} = \frac{p}{\rho v^2}$$

欧拉准数 Eu 表征流动问题中压(差)力作用的影响——压力相似准数。压差流动阻力问题、形状阻力问题、水流对物体表面的冲击力问题、空泡现象和阻力问题等应考虑满足此相似准则。

3. 弗鲁德准数 Fr

弗鲁德准数 Fr — Froude number

$$Fr = \frac{\text{惯性力}}{\text{重力}} = \frac{\rho v^2/L}{\rho g} = \frac{v^2}{Lg} \quad \text{or} \quad Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}}$$

弗鲁德准数 Fr 表征流动问题中重力作用的影响——重力相似准数。对于有自由表面的流动问题，如搅拌槽液面波动、潮汐、江河流动、堰流、孔口泄流、运动物体波浪阻力等，应考虑满足该相似准则。

4. 斯特哈尔准数 St

斯特哈尔准数 St—Strouhal number

$$St = \frac{\text{惯性力}t}{\text{惯性力}x} = \frac{\rho v / t}{\rho v^2 / L} = \frac{L}{vt} = \frac{\text{流体平均停留时间}}{\text{流动变化特征时间}}$$

斯特哈尔准数 St 表征非稳态问题的时间特性——时间相似准数。非稳态问题，周期性流动问题（如叶轮机械、螺旋桨的流体动力性能研究）等，应考虑满足 St 相似准则。

5. 马赫准数 Ma

马赫准数 Ma—Mach number: 气体高速流动时， ρ 随 p 变化显著，必须考虑可压缩性影响，此时 Ma 是重要相似准数：

$$Ma = \sqrt{\frac{\text{惯性力}}{\text{弹性力}}} = \frac{\sqrt{\rho v^2 / L}}{\sqrt{\rho c^2 / L}} = \frac{v}{a}$$

6. 韦伯准数 We

韦伯准数 We—Weber number, 表征流动问题中界面张力影响的相似准数：

$$We = \frac{\text{惯性力}}{\text{表面张力}} = \frac{\rho v^2 / L}{\sigma / L^2} = \frac{\rho v^2 L}{\sigma}$$

We 愈小意味着表面张力作用愈重要，适合于有相界面作用的小尺度问题。对于一般流动问题（大尺度问题）， $We \gg 1$ ，不予考虑。

7. 毛细管数 Ca

毛细管数 Ca—Capillary number: 表征两相流中界面张力相对影响的相似准数

$$Ca = \frac{\text{黏性力}}{\text{表面张力}} = \frac{\mu v / L^2}{\sigma / L^2} = \frac{\mu v}{\sigma} = \frac{We}{Re}$$

Ca 是导出准数。适合描述分散相液滴在缓慢环境中（惯性力小）的变形、破裂、聚并过程（比 Ca 更好），如微流控液滴生长与形成、油滴的变形与聚并过程。

7. 量纲分析法

(1) 量纲及其性质

物理量的量纲与单位——量纲是物理量量度的属性，单位是量度的数量。一个物理量的单位可有多种，但其量纲是不变的。

流动问题基本物理量及量纲：

长度—L，质量—M，时间—T，热力学温度— Θ

其它物理量的量纲是基本量纲的组合。物理量A的量纲用[A]表示。

比如：面积量纲[S]=[L²]，密度量纲[ρ]=[ML⁻³]，粘度量纲[μ]=[ML⁻¹T⁻¹]

量纲和谐原理：物理公式各加和项量纲必相同，等式两边量纲必相同。量纲和谐的公式称为量纲齐次式，不因单位制的不同影响计算结果。

量纲分析：利用量纲和谐原理，分析确定各物理量量纲指数的过程。

量纲分析具有多种用途：单位换算与推导、方程检验，...

——对于模型实验，量纲分析可将过程影响变量组合成数目较少的无量纲准数(无因次准数)，从而大大减少实验测试工作量；同时通过实验数据拟合可进一步得到相应的准数关联式；这种关联式是过程相似准数函数关系的表达，可作放大设计依据，在工程实际中得到广泛应用。



较为特殊的量纲：粗糙度量纲[e]=[L¹]，粘度[μ]=[ML⁻¹T⁻¹]。

8. 瑞利方法

(2) 瑞利方法 ——Rayleigh Analysis Method

前提条件：假定因变量与各自变量的函数关系是幂函数乘积形式。

具体步骤：用瑞利方法分析确定相似准数步骤包括：

- ① 确定影响过程行为的重要物理量(必须是独立量),并假定它们之间存在幂函数乘积形式的函数关系,由此写出该函数关系式的量纲方程。
- ② 根据量纲和谐原理,由量纲方程建立各物理量幂指数的代数方程(组)并求解。
- ③ 将各物理量的幂指数代入所假定的函数关系式,整理得到幂函数乘积形式的无量纲准数(相似准数)关系式。
- ④ 通过模型实验确定关系式中的待定常数,可获得具体的准数关联式。

应用要点：①既不能遗漏有重要影响的物理量，也要注意剔除次要量；主要因素遗漏将导致结果偏离实际，剔除次要因素有益于减少实验和数据处理工作量。

②无因次数数目是一定的，但组合形式可能不是唯一的，恰当的组合需要把握过程特征并借鉴已有经验。③该方法适合于影响因素较少的简单过程。

9. 白金汉方法

M L T 基本量纲

(3) 白金汉方法 —— Buckingham Method

π 定理: 若某一物理过程需要 n 个物理参数描述, 且这些参数涉及 r 个基本量纲, 则此过程可用 $(n-r)$ 个独立无因次数来描述。其中每一个无因次数称为一个 π 项, 故该过程的数学表达式为:

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-r}) = 0$$

每一 π 项(无因次数)的构成原则与方法:

- ① 从 n 个物理参数中选择 r 个参数作为**核心组参数**, 非独立变量不能作为核心组参数;
- ② 核心组 r 个参数的量纲必须涵盖 r 个基本量纲, 核心组参数至少应包含一个**几何特征参数**、一个**流体物性参数**和一个**运动特征参数**;
- ③ 每一 π 项由**核心组参数**和剩余的 $(n-r)$ 个物理参数量中的一个构成, 共有 $(n-r)$ 个 π 项。
- ④ 因每一 π 项都是无因次的, 故每一 π 项各物理量的同一量纲的指数之和必等于零, 由此可针对每一 π 项建立一个关于量纲指数的代数方程组, 求解该方程组确定各指数, 从而获得该 π 项的具体形式。

应用要点: ① 过程相关物理量应为一个完整集合, 否则关于 π 项的一般关系式 $f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-r}) = 0$ 就可能是不完整甚至是错误的; ② 各 π 项具体组合形式可能不是唯一的, 恰当的组合需要把握过程特征并借鉴已有经验; ③ π 定理只能给出 π 项项数和各 π 项的具体形式, 它们之间的函数关系应根据过程特点, 通过理论或实验结果分析并借鉴已有经验确定。



基本量纲指 M, L, T 。也包含热力学温度

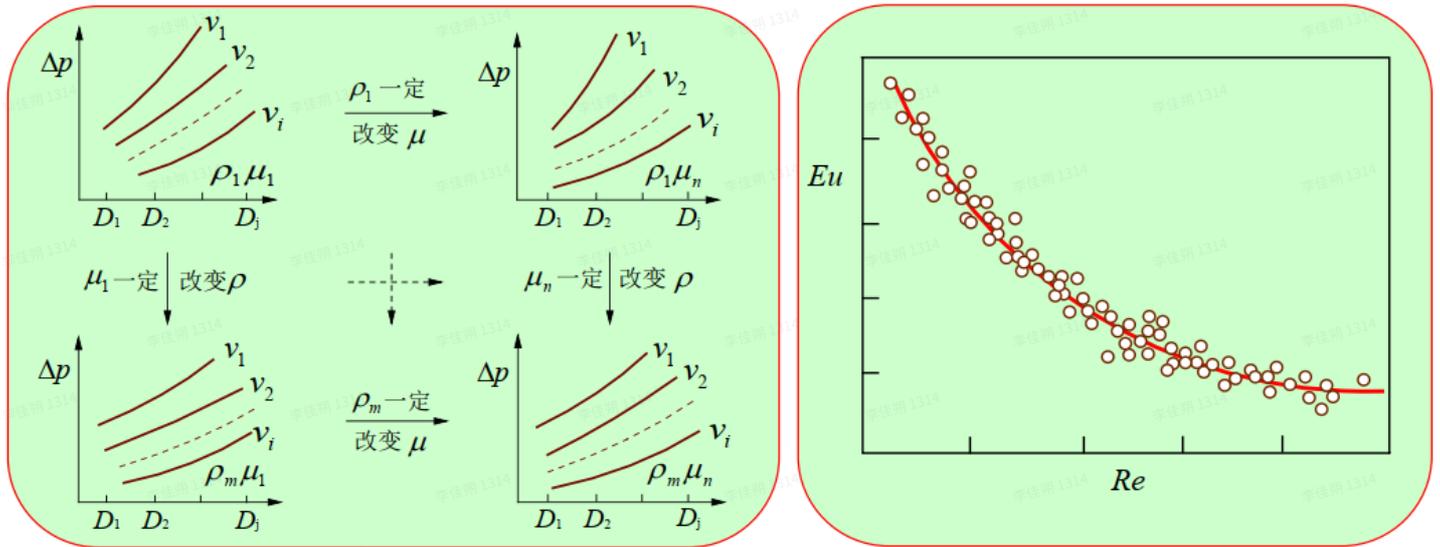
10. 量纲分析法指导模型试验的意义

① 量纲分析可将影响过程的相关变量组合成数目较少的无量纲数，从而大大减少实验测试工作量。（以例8-4为例）

$$\Delta p = f_a(v, D, \rho, \mu)$$

实验次数 $M = ijmn$ ，数据图 $N = mn$

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = f_b\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right) \rightarrow Eu = f_b(Re)$$



② 量纲分析法在实验之前就将各因素的关联影响归并于相似准数中，因此可大大降低实验数据分析处理的难度，便于寻求过程的本质规律。

比如，对于例8-4的问题，根据测试数据可直接在二维坐标下绘制出 $Eu \sim Re$ 关系，从而明确 Re 数中的 D 、 v 、 r 、 m 四个变量对压降准数 Eu 的关联影响规律。相反，若首先进行普遍实验获得 M 幅数据图，然后再据此进行关联分析得到 $Eu \sim Re$ 表现出的本质规律，其难度可想而知。

③ 以量纲分析法为指导的模型实验结果可用于放大设计。

对于普遍实验获得的数据图，由于难以寻求各因素的交互影响规律，故放大设计控制因素不明确。但量纲分析法获得的无量纲数就是过程的相似因素，这些无量纲数对应相的系统就是相似系统，因此，根据量纲分析结果进行模型实验，所得到的结果或无量纲数关联式在其实验范围内可作为工程放大设计依据。

11. 模型试验设计

1. 第一类模型试验

针对特定原型系统某一特征参数预测的模型实验——对原型系统的几何尺度、介质种类及操作条件中的部分参数已做定量规定。

【例】塔设备风载荷模型实验 I

一塔设备，高 $H=30\text{ m}$ ，直径 $D=800\text{mm}$ 。试通过模型实验预测该塔在空气温度 $T=20^\circ\text{C}$ 、风速 $V=20\text{ m/s}$ 时所受到的风载荷。

实验条件：水为实验流体，温度 $T_m=20^\circ\text{C}$ ，流速 $V_m=16\text{ m/s}$ 。

2. 第二类模型试验

探索某一物理过程特定参数一般规律的模型实验——只对过程几何特征、介质种类、操作条件作定性规定，不涉及具体结构尺度的原形系统。

【例】塔设备风载荷模型实验 II

试通过模型实验研究塔设备(直立圆柱体)的风阻系数。

12. 模型试验设计与基本过程与要点

1. 相似准则或相似因素的确定

针对过程特点分析确定其相似准则或相似因素

微分方程法：对于有微分方程描述的问题，可采用类似于上一节N-S方程的分析方法确定其相似准则。其中，对于常见的不可压缩流动问题，已知有 Re 、 Eu 、 Fr 、 St 四个相似准则，因此只需针对相关问题特点确定其主次。特别需要指出的是，对于一个具体问题，微分方程必须有配套的边界条件，因此边界条件也应纳入相似分析（从中可能会导出另外的相似准则）。

量纲分析法：对于无微分方程描述的问题（实践中更为常见），则可采用量纲分析法确定过程相关的无量纲数（相似因素），以作为实验变量；

2. 模型尺寸与实验介质的确定

模型尺寸

第一类实验：根据实验要求或相似准则要求确定，并受实验条件控制。

第二类实验：因不针对特定尺度的原型，故模型尺寸通常是根椐实验意图和实验条件确定。

实验介质

第一类实验：根据原型系统介质和实验条件确定，并受相似准则控制。通常，过程仅有一个定性准数时，实验介质可任意选取；有两个定性准数时，实验介质的选择将受到相关比尺的约束；定性准数达到三个时，约束将进一步增加，甚至于无法选择到满足所有相似准则的实验介质。

第二类实验：根据实验意图和实验条件确定（本质上仍然受定性准则控制）。一般动力学问题通常选空气或水。但实践表明根据一种介质获得的实验结果其适用范围往往非常有限。

3. 实验操作条件的确定

实验操作条件通常指压力、温度、流量参数，常温常压下的模型实验主要指流量参数。

第一类实验：操作条件通常由相似准则和实验条件确定。对于不能满足所有相似准则的模型实验，确定合理的操作条件需要正确区分相似准则的主次；操作条件通常还受模型尺寸的影响，两者的协调过程亦是对问题特点认识不断深化的过程。

第二类实验：操作条件通常由实验意图和实验条件两者协调确定。为如实反映无量纲数的影响规律，扩展实验结果的适用范围，通常都希望每一无量纲数有足够的变化范围。但既定实验条件下实验变量的变化范围总是有限的，完全可能达不到预期的范围，除非改进实验条件。但这种改进并非总是可行，尤其是涉及到诸如实验场地、测试手段的重大改变时。

例题 8-1~8-5 见PPT

作业 8-1 8-7 8-9 8-10 8-14 8-15

第六章 做题心得

1. 例题 8-1 $Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu}$ ，其中 ν 为运动粘度系数。

2. 例题 8-2 $Eu = \frac{p}{\rho v^2} = \frac{F}{\rho v^2 L^2}$ 。

3. 例题 8-3 $C_t = \frac{60/n_p}{60/n_m} = \frac{n_m}{n_p}$ 。

4. 对于已知基本量纲的物理量，比尺可化为相应基本量纲的比尺的乘除

$$C_F = \frac{C_m C_L}{C_t^2} = \frac{C_p C_L^4}{C_t^2}$$

5. 相似准则比尺方程的求解类似于N-S方程的比尺方程求解，求导相当于除以求导变量，每一项提供一个比尺方程

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) + \rho \beta g \Delta T$$

则有 $C_p \frac{C_v^2}{C_L} = C_\mu \frac{C_v}{C_L^2} = C_p C_\beta C_g C_T$

得到相似准则 $\frac{C_p C_v C_L}{C_\mu} = 1$ 与 $\frac{C_p C_\beta C_g C_T C_L^2}{C_\mu C_v} = 1$

两式相乘，得到 $\frac{C_p^2 C_\beta C_g C_T C_L^3}{C_\mu^2} = 1$

即得到 $Re = \frac{\rho v L}{\mu}$, $Gr = \frac{L^3 \rho^2 g \beta \Delta T}{\mu^2}$

Gr 即 $\frac{\text{温差浮力}}{\text{黏性力}} \times Re$

回忆卷(欢迎更新)

23-24

<https://www.cc98.org/topic/5875970/1#1>

<https://www.cc98.org/topic/5875968>

马赫数的定义：速度与音速的比值 $Ma = \frac{v}{c}$ 。

雷诺数的定义：无量纲的量，通过衡量流体惯性与粘性力的比率来描述不同情况下流体流动的性质，

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu}$$

局部阻力损失与沿程阻力损失：

阻力损失 h_f 是单位重量流体因摩擦等损耗的机械能（压头），其基本单位为 m（或 J/N）；而 ρgh_f 则代表因摩擦等导致的压力降，其基本单位为 Pa（或 N/m^2 ）。

对于管道系统，阻力损失 h_f 一般包括管道沿程的摩擦阻力损失和局部阻力损失（管道弯头、三通、阀门、孔板等局部阻力件产生的阻力损失）。两者计算公式如下。

$$\begin{aligned} \text{沿程阻力损失} \quad h_f &= \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \\ \text{局部阻力损失} \quad h_f &= \zeta \frac{v^2}{2g} \end{aligned} \quad (4-56)$$

式中， D 、 L 分别为管道直径和长度； λ 为摩擦阻力系数， ζ 为局部阻力系数，其值可由相关实验关联式计算或由相关手册查取，也可参见 9.4 节管道阻力计算。

局部阻力损失 指的是在管道几何形状突变的局部区域内，流体速度大小与方向突变产生的附加机械能损失。其本质是，该区域内流动分离产生的涡流区要消耗机械能，该区域壁面摩擦增强使机械能损耗增加，但前者占重要地位，即涡流耗散是其主要机理。

- 突扩管、突缩管都有局部阻力损失

摩擦耗散:运动流体克服层间摩擦产生的机械能损失→沿程阻力损失机理

涡流耗散:局部涡流区的涡旋摩擦产生的机械能损失→局部阻力损失机理

局部阻力损失: 流道几何形状突变局部区域内流体速度大小与方向突变产生的附加机械能损失，其本质是局部区产生的大量涡旋使机械能损耗增加。

——纯粹由剪切摩擦使流体产生的流动称为**摩擦流动**或**剪切流动**，特点是沿流动方向无压力梯度。如:强制涡运动、密封端面或轴承液膜运动。

