

反馈控制方式：检测偏差再纠正偏差

反馈控制系统的三个基本功能①测量 ②比较 ③执行

开环控制系统：

- 系统仅受输入量和扰动量控制。
- 输出端和输入端不存在反馈回路
- 输出量在整个控制过程中对系统的控制不产生任何影响。

优点：①简单、稳定、可靠。

②若组成的元件特性和参数值比较稳定，且外界干扰小，开环系统能保持一定精度。

缺点：①无自动纠偏能力。

闭环控制系统：

- 输出端和输入端之间存在反馈回路
- 输出量对控制过程有直接影响。
- 闭环的作用：利用反馈，减少偏差。

优点①精度高。

②对外界扰动和系统参数变化不敏感。

缺点①存在稳态、震荡等问题。

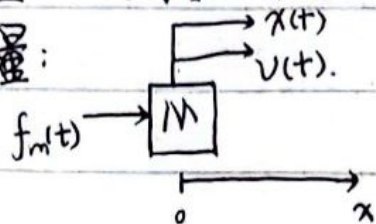
②系统分析与设计较为复杂。

对控制系统的基本要求

①稳定性 ②快速性 ③准确性

质量—弹簧—阻尼系统

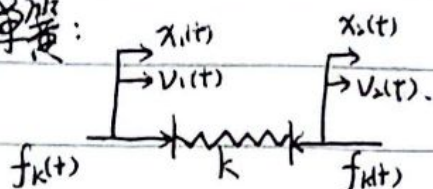
质量:



$$f_m(t) = M \frac{d}{dt} v(t) = M \frac{d^2}{dt^2} x(t).$$

$$M \ddot{x}(t) = f_m(t).$$

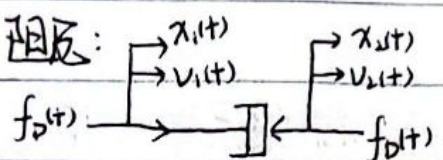
弹簧:



$$f_k(t) = k[x_1(t) - x_2(t)] = k x(t)$$

$$= k \int_{-\infty}^t [v_1(t) - v_2(t)] dt = k \int_{-\infty}^t v(t) dt.$$

阻尼:



$$f_D(t) = D[v_1(t) - v_2(t)] = D v(t)$$

$$= D \left[\frac{d}{dt} x_1(t) - \frac{d}{dt} x_2(t) \right] = D \frac{d}{dt} x(t).$$

电气系统

电阻:

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

电容:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}.$$

电感:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}.$$

① 物理本质不同的系统, 可以有类似的数学模型.

② 通常情况下元件, 或系统微分方程的阶次等于元件或系统中所包含的独立储能元件 (惯性质量、弹性要素、电感、电容等) 的个数.

③ 系统的动态特性是系统的固有特性, 仅取决于系统的结构及其参数, 与系统的输入无关.

拉氏变换:

$$X(s) = L[x(t)] \triangleq \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, t \geq 0$$

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{s}$$

$$e^{at} \cdot 1(t) \Rightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$\sin \omega t \cdot 1(t) \Rightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\cos \omega t \cdot 1(t) \Rightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$t^n \cdot 1(t) \Rightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

性质:

① 叠加原理 $L[ax_1(t) + bx_2(t)] = aX_1(s) + bX_2(s)$

② 微分定理 $L[\frac{d}{dt} x(t)] = sX(s) - x(0^+)$

在零初始条件下: $\frac{d^n}{dt^n} x(t) \Rightarrow s^n X(s)$

③ 积分定理 $L[\int_0^t x(\tau) d\tau] = \frac{X(s)}{s} + \frac{x^-(0^+)}{s}$ $x^-(t) \triangleq \int x(\tau) d\tau$

零初始条件下: $\int \dots \int x(t) (dt)^n \Rightarrow \frac{X(s)}{s^n}$

④ 衰减 $L[e^{-at} x(t)] = X(s+a)$

⑤ 延时 $L[x(t-a)1(t-a)] = e^{-as} X(s)$

⑥ 初值 $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$

⑦ 终值 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

⑧ 时间比例尺 $L[x(\frac{t}{a})] = aX(as)$

⑨ 卷积 $L[x(t) * y(t)] = X(s)Y(s)$ $x(t) * y(t) \triangleq \int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau$

$$L[\delta(t)] = 1$$

反变化用留数.

零初始条件下线性定常系统传递函数 $G(s) \triangleq \frac{X_o(s)}{X_i(s)}$

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$G(0) = \frac{b_m}{a_n} = K \quad \text{静态放大系数/静态增益}$$

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_0 (s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{a_0 (s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

$s = z_i$: 零点

$s = p_i$: 极点

$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$: 脉冲响应函数; 权函数

比例环节 $G(s) = k \quad x_o(t) = k x_i(t)$

一阶惯性环节 $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$, T : 时间常数

$$T \dot{x}_o(t) + x_o(t) = x_i(t)$$

微分环节 $G(s) = ks \quad x_o(t) = k \dot{x}_i(t)$

积分环节 $G(s) = \frac{k}{s} \quad x_o(t) = k \int x_i(t) dt$

二阶振荡环节 $G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$, $0 < \zeta < 1$ (又 $\omega_n = \frac{1}{T}$)

$$T^2 \ddot{x}_o(t) + 2\zeta T \dot{x}_o(t) + x_o(t) = x_i(t)$$

串联: $\rightarrow [G_1] \rightarrow [G_2] \rightarrow \Rightarrow \rightarrow [G_1 G_2] \rightarrow$

并联: $\rightarrow \begin{matrix} \rightarrow [G_1] \\ \rightarrow [G_2] \\ \rightarrow [G_3] \end{matrix} \rightarrow \Rightarrow \rightarrow [G_1 + G_2 + G_3] \rightarrow$

反馈: $\rightarrow \begin{matrix} + \\ \otimes \end{matrix} \rightarrow [G] \rightarrow \begin{matrix} - \\ \oplus \end{matrix} \rightarrow [H] \rightarrow \Rightarrow \rightarrow \left[\frac{G}{1+GH} \right] \rightarrow$

负反馈: $\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

正反馈: $\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$

梅逊公式: $P = \frac{1}{\Delta} \sum P_k \Delta_k$

P : 总传递函数 P_k : 第 k 条前向通路的传递函数.

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

$\sum L_a$: 所有不同回路传递函数之和

$\sum_{b,c} L_b L_c$: 每两个互不接触回路传递函数乘积之和.

Δ_k : 若一个前向通路不与某回路接触, 将与第 k 条前向通路相接触的

回路的 $L_i = 0$. 余下的 Δ 即为 Δ_k

阶跃函数 $x_i(t) = \begin{cases} a, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

斜坡函数 $x_i(t) = \begin{cases} at, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

加速度函数 $x_i(t) = \begin{cases} at^2, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

脉冲函数 $x_i(t) = \begin{cases} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{a}{t_0}, & 0 < t < t_0 \\ 0, & t < 0, t > t_0 \end{cases}$

δ 函数: $a=1$, $L[\delta(t)] = 1$

• 输出响应为输入函数与脉冲响应函数的卷积. 脉冲响应函数由求得各权函数.

• 系统的传递函数即为单位脉冲响应函数的象函数.

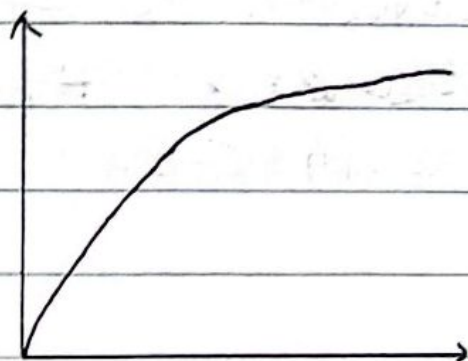
一阶系统的单位阶跃响应 $x_0(t) = (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t)$

① 一阶惯性系统总是稳定的, 无振荡

② 经过一个时间常数上升 0.632%

③ 经 (3~4)T, 响应曲线已达稳态的 95%~98%.

④ $t=0$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{T}$.



二阶系统 $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

①欠阻尼 $0 < \zeta < 1$

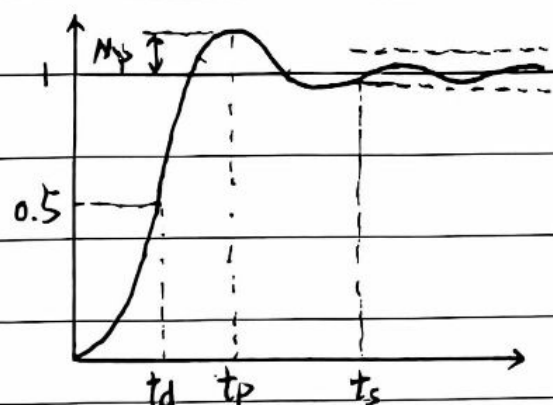
②临界阻尼 $\zeta = 1$

③过阻尼 $\zeta > 1$

④零阻尼 $\zeta = 0$

⑤负阻尼 $\zeta < 0$

时域分析性能指标——系统对单位阶跃输入的瞬态响应



①上升时间 t_r (从0首次到稳态, 或10%~90%)

②峰值时间 t_p (从0达峰值)

③最大超调量 M_p

④调整时间 t_s (保持在一定误差范围内的时间)

⑤延迟时间 t_d (0~50%)

⑥振荡次数, t_s 内的响应曲线振荡次数。

t_r, t_p, t_s, t_d : 反映系统快速性

M_p 、振荡次数: 反映系统相对稳定性

• 距虚轴最近的闭环极点为主导极点, 对应着瞬态响应中衰减最慢的项。

• 系统传递函数中, 若分子分母具有负实部的零、极点上相近, 则可将该零点和极点一起消掉, 称为偶极子相消。

奈氏图: ω 从 $0 \rightarrow +\infty$, $G(j\omega)$ 作为一个矢量, 其端点在复平面内的轨迹

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(U_\omega + V_\omega)^2} \quad \angle G(j\omega) = -\arctan \frac{V_\omega}{U_\omega}$$

机电系统的开环频率特性一般可以表示为:

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1) \cdots}{(j\omega)^{\lambda}(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1) \cdots}$$

$\lambda=0$ 0型系统 $\lambda=1$ I型系统 $\lambda=2$ II型系统

Bode图:

$$n(\text{dB}) = 20 \lg N$$

若 $\omega_2 = 10\omega_1$, 则称从 ω_1 到 ω_2 为十倍频程, 以 "dec" 表示.

一阶惯性环节的Bode图: 转角频率 $\omega_T = \frac{1}{T}$

最小相位系统:

在 s 右半平面上既无极点, 又无零点的传递函数称为最小相位传递函数. 具有最小相位传递函数的系统, 称为最小相位系统.

控制系统稳定的一个充分必要条件：系统特征方程式的根全部具有负实部，或闭环传递函数的极点全部在S平面的左半平面。

劳斯稳定性判据（闭环）：

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad \text{特征方程}$$

劳斯阵列	s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	...
	s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	...
	s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	...
	s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	s^2	u_1	u_2			
	s^1	v_1				
	s^0	w_1				

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

① 特征方程的各项系数 a_i 都不等于 0。

② 特征方程的各项系数 a_i 的符号都相同。

同时，如果劳斯阵列中第一列所有项均为正号，则系统一定稳定。

赫尔维茨稳定性判据：

逆时针包围 $(-1, j0)$ 点的圈数等于其开环右极点的个数

• 设开环特征多项式在右半平面有 p 个零点, 原点处有 q 个零点, 其余 $(n-q-p)$ 个零点在左半平面, 则对于奈氏开环频率图, 当 ω 从 0 到 $+\infty$ 变化时, 其相对 $(-1, j0)$ 点的角变化为 $(p\pi + q\frac{\pi}{2})$ 时, 系统闭环后稳定

• 如果开环特征多项式没有右半平面的根,且在 $L(\omega) \geq 0 \text{ dB}$ 的所有角频率范围内,相角范围都大于 -180° ,那么闭环系统是稳定的.

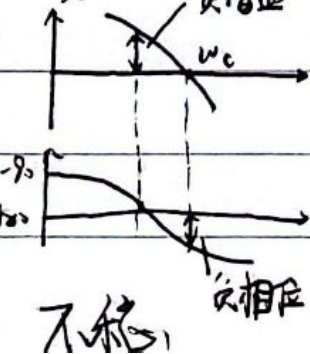
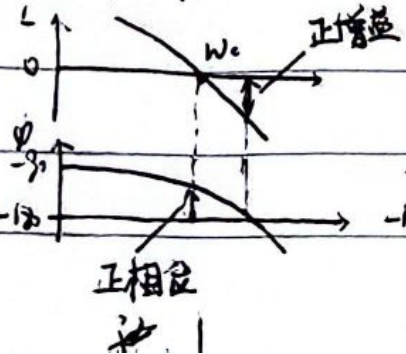
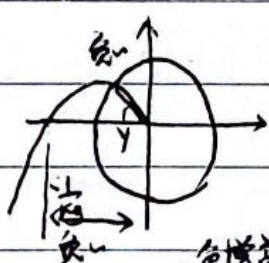
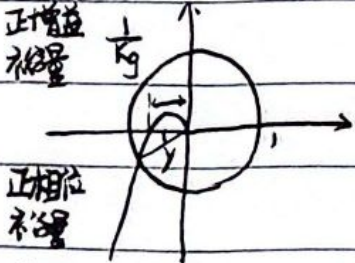
·负零线: 砒图从大于 $-\pi$ 的第三象限越过负实轴到第二象限 

· 正穿越: ~ 从 二 三 

• 半次正穿越: $\omega=0$ 时 $\phi(0)=-\pi$, 乃氏图向第三象限去.

半次负穿越: 二

• 若0型或I型系统在开环状态下的特征方程有 p 个根在右半平面,且开环静态放大倍数大于0,在所有 $L(\omega) \geq 0$ 的频率范围内,相频曲线在 $(-\pi)$ 线上的正负穿越之差为 $p/2$ 次,则闭环系统是稳定的。



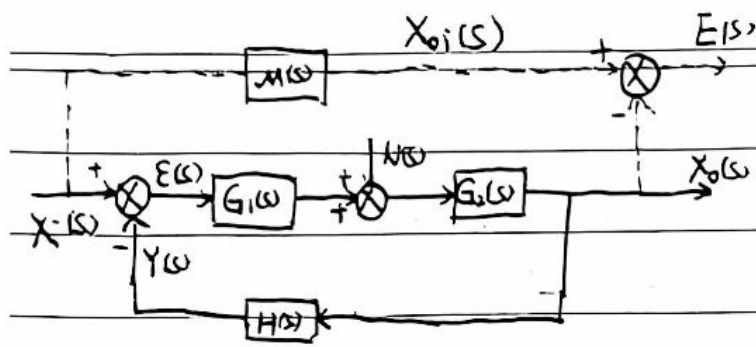
相位裕量

$$\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_c).$$

幅值裕量

$$K_g = \left| \frac{1}{G(j\omega_{-p})} \right|$$

$\gamma > 0$ $K_g > 1$ 稳定, 越大越稳



误差：控制系统的希望输出量（理想输出）和实际输出之差，记作 $e(t)$

其拉氏变换的象函数记为 $E(s)$

- 误差信号的稳态分量，被称为稳态误差或静态误差，记作 e_{ss}
- 偏差信号 $E(t)$ 也能反映系统误差的大小。

• 误差信号和偏差信号之间的关系： $E(s) = H(s)E(s)$

$$e_{ss} = \frac{E_{ss}}{H(0)} \quad E_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

• 对于单位反馈控制系统，稳态误差等于稳态偏差

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_1s+1)(T_2s+1)\dots}{s^N(T_3s+1)(T_4s+1)\dots}$$

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)H(s)} = \frac{1}{1+G(0)H(0)} \quad \text{对单位阶跃输入的稳态偏差}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = G(0)H(0)$$

$$E_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$$

省流：单位阶跃输入 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$

$$E_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$$

单位斜坡输入 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$

$$E_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

单位加速度输入 $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s)$

$$E_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

· 时域性能指标

M_p 最大超调量或最大百分比超调量 相对稳定性指标

t_s 调整时间 t_p 峰值时间 快速性性能指标

· 开环频域指标

ω_c 开环截止频率 快速性性能指标

γ 相位裕量 K_g 幅值裕量 相对稳定性性能指标

K_p 静态位置误差系数

K_v 静态速度误差系数

K_a 静态加速度误差系数

} 准确性性能指标

· 闭环频域指标

ω_r 谐振角频率

M_r 相对谐振峰值 $M_r = \frac{A_{max}}{A(0)}$

ω_m 复现频率, 规定 Δ 作为反映低频正弦输入信号作用上的允许误差, 那么 ω_m 的值就是幅频特性值与 $A(0)$ 之差第一次达到 Δ 时的频率值. 若频率超过 ω_m , 输出就不能“复现”输入, 所以 $0 \sim \omega_m$ 表示复现带宽, 又称工作带宽.

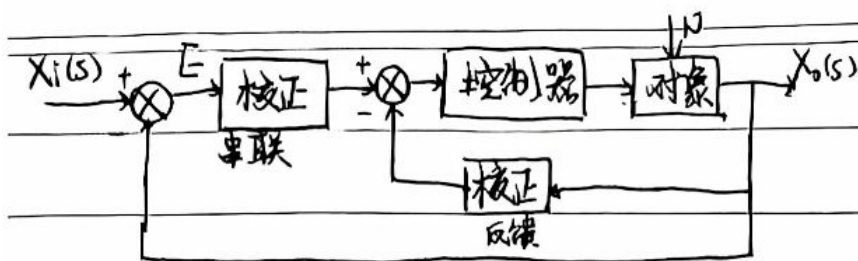
ω_b 闭环截止频率, $0 \sim \omega_b$ 系统的闭环带宽.

· 在无超调的情况下, 误差 $e(t)$ 是单调变化的

$$I = \int_0^{\infty} e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s)$$

· 若系统以单位阶跃输入 N_0 , 输出的过渡过程存在振荡:

$$I = \int_0^{\infty} e^*(t) dt$$



串联校正:

- 超前校正 主要是为了使系统响应性,超调小,可采用
- 滞后校正 对快速性要求不高的系统常采用滞后校正
- 滞后—超前校正

PID校正装置

- 比例控制器 (P调节)

控制器的输出信号 \$u\$ 与偏差 \$e\$ 成比例: $u = K_p e$

$$G_j(s) = K_p$$

$K_p \uparrow$, 偏差减小, 但稳定性下降, 过大的 K_p 产生剧烈振荡和不稳定.

- 积分控制器 (I调节)

$$u = K_I \int_0^t e dt$$

$$G_j(s) = \frac{K_I}{s}$$

对阶跃输入的无差调节, 系统平衡后, 跃信号的稳态设定值与被调量无差.

- 微分控制器 (D调节)

$$u = K_D \frac{de}{dt}$$

$$G_c(s) = K_D s$$

可以对被调量的变化趋势进行调节, 及时避免出现大的偏差.

单位反馈系统中,应用 11 圆的概念来确定开环增益,使系统闭环谐振峰值满足某期望值.

① 画出标准化开环传递函数 $G(j\omega)/K$ 的奈氏图.

② 原点作直线,使其与负实轴夹角 φ 满足

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{M_r}$$

③ 作一圆心在负实轴的圆,使它即相切于 $G(j\omega)/K$ 的轨迹,又相切于直线

④ 由切点 P 作负实轴垂线,交负实轴于 A.

⑤ A 调整到 $(-1, j0)$

$$K = 1/0A$$

二阶开环最优模型 $\omega_c = \frac{1}{2\tau}$

$$[G(s) = \frac{K_v}{s(T_1s+1)}]$$

最佳阻尼比 $\zeta = 0.707$.

特点: 稳定储备大, 是 I 型系统, 静态位置误差系数无穷大.

快速性取决于剪切频率 ω_c .

高阶最优模型

典型三阶, 也叫典型 II 型系统: $G(s) = \frac{K(T_2s+1)}{s^2(T_3s+1)}$ ($T_2 > T_3$)

即保证了 ω_c 附近的斜率为 -20 dB/dec , 又保证了低频段有高增益, 既保证了稳定性, 又保证了准确性.

$$\text{中频宽 } h = \frac{\omega_c}{\omega_z} = \frac{T_2}{T_3}$$

h 越大, 系统的相对稳定性越好.

ω_c 越大, 系统快速性越好.

自动控制系统的概念

在没有人直接参与的情况下,利用外加的设备或装置,使机器、设备或生产过程的某些工作状态或参数,准确地按照预定的规律运行。

反馈: 输出量通过适当的测量装置将信号全部或一部分返回输入端, 负与输入端进行比较, 基于反馈基础上的“检测偏差用以纠正偏差”的原理又称为反馈控制原理。

反馈控制系统具备 测量、比较和校正 三个基本功能

反馈控制系统中, 反馈信号与给定信号相反, 使偏差越来越小, 称为负反馈。

控制系统的基类型

按输入量的特征分类

① 恒值控制系统

· 系统的输入量为恒定值, 控制任务是保证在任何扰动作用下系统的输出量为恒值。

· 举例: 恒温箱控制, 电网电压, 频率控制等。

② 程序控制系统

· 输入量的变化规律预先确定, 输入装置根据输入的变化规律, 发出控制指令, 被控对象按照指令程序的要求运动。

· 举例: 数控加工系统。

③ 随动系统 (伺服系统)

· 系统的输入量不能预先确定, 其控制要求是系统的输出量迅速、平稳地随输入量变化, 并能排除各种干扰因素的影响, 准确地复现输入信号的变化规律。

· 举例: 仿形加工系统, 火炮自动瞄准系统等。

控制系统中传递信号的性质分类

① 连续控制系统

· 系统中各部分传递的信号为随时间连续变化的信号, 常用微分方程描述

② 离散控制系统

· 系统中某一处或多处的信号为脉冲序列或数字量传递的信号, 常用差分方程描述

· 经典控制理论的数学模型是以传递函数为基础

· 现代控制理论的数学模型只是以状态空间方程为基础

从动态性能看, 在相同型式的输入作用下, 数学模型相同而物理本质不同的系统其输出响应相似. 相似系统是控制理论中进行实验模拟的基础

· 系统的动态特性是系统的固有特性, 仅取决于系统的结构及其参数与输入无关

线性化处理的注意事项

· 线性化方程的阶数与平衡工作点的选择有关

· 线性化是有条件的, 必须注意线性化适用的工作范围

拉氏变化可理解为广义单边傅里叶变换

$F[f(t)]$: 时域 $\longleftrightarrow$ 频域

$L[j(t)]$: 时域 $\longleftrightarrow$ 复频域

极点的意义

① 传递函数中的分子和分母方程中的系数对应, 取好了系统结构参数

② 传递函数的极点决定系统的主要动态特征——衰减速度和振荡频率, 分子只影响系统增益和常数。

③ 极点实部决定衰减速度, 极点虚部决定振荡频率。

瞬态响应

系统在某一输入信号作用下其输出量从初始状态到稳态状态的响应过程

稳态响应

当某一信号输入时, 系统在时间趋于无穷大时的输出状态。

单位脉冲函数 $\delta(t)$

· 拉氏变换为 1

· 系统的传递函数即为单位脉冲响应函数的象函数

· 输出响应为输入函数与脉冲响应函数的卷积, 脉冲响应函数由此得名权函数

· 系统极点负实部离虚轴越远, 该极点对应的项在瞬态响应中衰减得越快。

· 距离虚轴最近的闭环极点为主导极点。

一般工程上极点离虚轴距离 $\lambda_A > 5\lambda_B$ 时, 分析系统时忽略极点 A。

· 系统传递函数中, 若分子分母具有负实部的零、极点数值上相近, 则可将该零点和极点一起消掉, 称为偶因子相消。(右平面的极点不可相消)。

一般工程上 $d_{p-s} < \frac{1}{10} d_{p-o}$ or $\frac{1}{10} d_{s-o}$ 时, 即可认为是偶因子。

最小相位系统:

- 在 S 右半平面上既无极点又无零点的传递函数, 称为最小相位传递函数.
- 具有最小相位传递函数的系统称为最小相位系统.
- 对于相同阶次的基本环节, ω 从 $0 \rightarrow +\infty$, 最小相位的基本环节造成的相移^是最小的.
- 对于最小相位系统, 知道系统的对数幅频特征, 其相频特征和传递函数就唯一确定了.
对于非最小相位系统便不成立.
- 只包含比例、积分、微分、惯性和振荡环节, 一定最小相位系统.

设闭环频率特性的幅值为 $M(\omega)$, 相位角为 $\varphi(\omega)$.

闭环频率响应可表示为

$$\frac{X_o(j\omega)}{X_i(j\omega)} = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

类似等高线思想, 可求出闭环频率特性的等幅值轨迹和等相角轨迹, 即 M 圆和 N 圆.

- 串联延时环节对稳定性不利.
- 一阶和二阶总是稳定的, 但若存在延时环节, 系统可能变为不稳定.
- 延时时间越大, 系统越可能变得不稳定.
- 延时时间一定时, 减小开环放大倍数有利于提高系统稳定性.
- 对于存在延时环节的一阶或二阶系统, 开环放大倍数应限制在较低范围内, 并尽可能减小延时时间.

为了保证有合适的相位裕量, 一般希望 ω_c 上的斜率等于 -20 dB/dec .