一、概述

1.各种系统

2.自动控制系统要求：稳定性、快速性（动态）、准确性（静态）

补充：拉普拉斯变换

1.定义$t < 0$，$f(t) = 0$，

它的拉氏变换为$L\big(f(t)\big) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

2.定理 1：$L\big(f(t-\alpha)\big) = e^{-\alpha s}F(s)$

定理 2：$L\big(e^{-\alpha t}f(t)\big) = F(s+\alpha)$

定理 3：$L\left(f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right) = \alpha F(\alpha s)$

定理 4：$L\big(f'(t)\big) = sF(s) - f(0)$

定理 5：$L(\int f(t)dt) = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int f(t)dt}{s}|_{t=0}$

定理 6：$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

定理 7：$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

定理 8：$L\big(f_1(t) * f_2(t)\big) = F_1(s)F_2(s)$

3.拉普拉斯逆变换

对于分母极点各不相同，直接乘以该项取极限即为留数

对于 n 重根，第 n-k 次方的系数为$(s+s_0)^nF(s)$求 k 阶导乘$\frac{1}{k!}$

对于复根，进行分母配方

4.用拉普拉斯解常微分方程

先两边进行拉普拉斯变换（运用微分定理），解出 X(s)，再进行反变换，有时会用到微分定理：

即$L\big(x'(t)\big) = sX(s) - x(0)$，$L\big(x''(t)\big) = s(sX(s) - x(0)) - x'(0)$

（常用拉普拉斯变换：$L\big(\delta(t)\big)=1$，$L\big(1(t)\big)=\frac{1}{s}$，$L\left(\frac{t^n}{n!}\right)=\frac{1}{s^{n+1}}$，$L(sin\omega t)=\frac{\omega}{\omega^2+s^2}$，$L(cos\omega t)=\frac{s}{\omega^2+s^2}$）

二、线性系统

1.传递函数：$G(s)=\frac{L(c(t))}{L(r(t))}=\frac{C(s)}{R(s)}$

2.典型环节：

比例：$c(t)=Kr(t)$，$G(s)=K$

惯性：$T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$，$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$

积分：$T\frac{dc(t)}{dt}=r(t)$，$G(s)=\frac{1}{Ts}$

微分：$c(t)=\tau\frac{dr(t)}{dt}$，$G(s)=\tau s$

一阶微分：$c(t)=\tau\frac{dr(t)}{dt}+r(t)$，$G(s)=\tau s+1$

二阶振荡：$T^2\frac{d^2c(t)}{dt^2}+2\zeta T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$，$G(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts}$

延时：$c(t)=r(t-\tau)$，$G(s)=e^{-\tau s}$

（弹簧-阻尼-质量系统：对于无质量系统：每个元件所受力均相等，只需分析每个元件两端的位移；对于有质量系统，分析质量元两端受力，列出牛顿第二定律）

（电路：电容的阻抗为$\frac{1}{Cs}$）

3.叠加原理：$C(s)=\emptyset(s)R(s)+\emptyset_n(s)N(s)$

4.梅森公式：$P=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$

其中 n 是前向通路总数，$\Delta=1-\sum L_i+\sum L_iL_j-\cdots$,$L$是回路总增益

而P_k是该通路总增益，Δ_k是Δ除去与该通路接触项后的余子式

三、时域分析法

1.一阶系统：$\emptyset(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts+1}$

2.二阶系统：$\emptyset(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}$

（有时要从题目中给的开环传递函数 G 先确定$\emptyset$）

3.对于单位阶跃信号的二阶系统：

（1）过阻尼：$\varsigma>1$，分母函数两根P_1,P_2均为负实根

$$c(t)=1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\varsigma^2-1}}\left(\frac{e^{P_1 t}}{P_1}-\frac{e^{P_2 t}}{P_2}\right)$$

（2）临界阻尼：$\varsigma=1$，两根相等为负实根

$$c(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

（3）欠阻尼：$0<\varsigma<1$，两根为负数实部的共轭复根

记$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}$，$c(t)=1-\frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin(\omega_d t+\theta)\,,tan\theta=\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}$

（ς越大，频率越小，振荡幅度也越小）

（4）无阻尼：$\varsigma=0$，两根均在虚轴上

$$c(t)=1-cos\omega_n t$$

4.欠阻尼的二阶系统性能指标（常用：$\varsigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$）

上升时间：$t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_d}$

峰值时间：$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}$

超调量：$\sigma\%=e^{-\frac{\pi\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}\times 100\%$

调节时间（近似）：$t_s=\frac{3}{\varsigma\omega_n}(5\%)$，$t_s=\frac{4}{\varsigma\omega_n}(2\%)$

振荡次数：$N=\frac{t_s}{T_d}$，$T_d=\frac{2\pi}{\omega_d}$

5.系统稳定性的劳斯判据：第一列改变几次符号就有几个正实部的根，第一列全为正为系统稳定的充要条件

一般情况：看书上例题

特殊情况 1：第一列出现 0：将 0 改为一充分小参数ε，然后继续操作

特殊情况 2：某一行全为 0：将这一行所代表的多项式求导构造辅助多项式，更新系数后继续向下操作

6.稳态误差：

无干扰：$E(s) = R(s) - C(s)H(s)$

有干扰：$E(s) = \frac{1}{1+G_1G_2H}R(s) - \frac{G_2H}{1+G_1G_2H}N(s)$

7.系统稳态误差通式：

$$ess = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\lim_{s\to 0} s^{v+1}R(s)}{K + \lim_{s\to 0} s^{v}}$$

注：终值定理的适用条件：E(s)的所有极点都在复平面的左半边（不包括虚轴，但包括原点）

称 K 为静态误差系数，v 表示系统阶数

对于阶跃信号：

$$ess = \frac{R}{1+K}(v=0); = 0(v \ge 1)$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0}\frac{K}{s^v} = K(v=0); = \infty(v \ge 1)$$

对于斜坡信号：

$$ess = \infty(v=0); \frac{R}{K}(v=1); = 0(v \ge 2)$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = \lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{v-1}} = 0(v=0); = K(v=1); = \infty(v \ge 2)$$

对于加速度信号：

$$ess=\infty(v=0,1);\frac{R}{K}(v=2);=0(v\geq 3)$$

$$K_v=\lim_{s\to 0}s^2G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{v-2}}=0(v=0,1);=K(v=2);=\infty(v\geq 3)$$

四、根轨迹法

1.开环传递函数：$G(s)H(s)=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$

（K^*是根轨迹增益，如要求开环增益 K 则还要乘后面的总常数项）

相角方程：$\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle\left(s-p_j\right)=(2k+1)\pi$

满足相角方程是 s 在根轨迹上的充要条件

2.根轨迹绘图法则

（1）根轨迹分支数=max(m,n)

（2）根轨迹连续且关于实轴对称

（3）根轨迹始于开环极点，终于开环零点或无穷远处

（4）实轴上若某区域右侧实零、极点个数之和为奇数，则该区域在根轨迹上

（5）渐近线：

条数为 n-m

与实轴夹角：$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

与实轴交点：$\sigma_a=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}$

（6）起始角：$\theta_{pi}=\pi+\sum_{j=1}^{m}\varphi_{zjpi}-\sum_{j=1}^{n}\theta_{pjpi}$

终止角：$\varphi_{zi}=\pi+\sum_{j=1}^{m}\theta_{pjzi}-\sum_{j=1}^{n}\varphi_{zjzi}$

（7）分离点：坐标为方程$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d-z_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{d-p_j}$的解

（8）与虚轴交点：利用劳斯阵列，令s^1等于零的K^*代入s^2求得交点

（9）根之和：当$n-m\geq 2$时，闭环极点之和等于开环极点之和

（增加开环零点会让根轨迹左移，系统更稳定；反之，增加开环极点会让根轨迹右移，系统更不稳定）

五、频域分析法

1.对于系统传递函数 G(s)，频率特性为$G(j\omega)$

幅频特性为$A(\omega)=|G(j\omega)|$，相频特性为$\varphi(\omega)=Arg(G(j\omega))$

对数幅频特性为$L(\omega)=20lgA(\omega)$

应用：对于三角函数的输入信号，可以求闭环传递函数的频域特性来确定输出的幅值与角度变化

2.伯德图（对数频率特性曲线）

（1）先标准化，即每个因式的常数项都为 1

（2）判断斜率，每经过一个一阶微分环节斜率增加 20，每经过一个二阶微分环节斜率增加 40，每经过一个惯性环节斜率减小 20，每经过一个振荡环节斜率减小 40

（3）过（1，20lgK）作斜率为-20v 的渐近线

（4）调整折线；判断和横轴交点方法：只需看交点之前的转折点，满足分子连乘等于分母连乘

3.奈奎斯特图（开环幅相特性曲线）

（1）起点 ω=0，

如含有 v 个积分环节，则 A(0)=∞，φ(0)=v×(-90 度)

（2）终点 ω=∞

A(∞)=0，φ(∞)=-(n-m)×90 度

（3）与实轴交点：令虚部为 0，求出的 ω 代入实部

4.奈奎斯特判据

（1）辅助函数 F(s)=1+G(s)H(s)在右半平面的零点数为 Z

F(s)的极点数为 P，幅相特性曲线绕(-1,0)逆时针所转圈数为 N

有 Z=P-2N，显然系统稳定等价于 Z=0

（2）在奈奎斯特图（-1，0）的左侧，记曲线从上向下穿过的次数为 N+，从下向上穿过的次数为 N-（若起点在轴上，则记为半次），则有 N=N+-N-

5.相角裕量：$A(\omega_c)=1$，$\gamma=\varphi(\omega_c)+180°$

幅值裕量：$\varphi\left(\omega_g\right)=180°$，$K_g=\frac{1}{A(\omega_g)}$

6.低频段：反映系统稳态性能；中频段：反映系统平稳性和快速性；高频段：反映系统抗干扰能力

7.开环频率特性和动态性能：相角裕量越大，则超调量越小，系统平稳性越好；剪切频率越大，则系统调节时间越短，系统快速性越好

六、系统校正

1.相位超前校正：$G_c(s)=\frac{\tau s+}{\alpha\tau s+1}$，$\alpha<1$

利用超前相位角来补偿原系统相角滞后，增大相角裕度，因此要使最大相位超前角尽可能出现在校正后系统的剪切频率处

步骤：

（1）根据要求确定 K

（2）求出原系统的相角裕度γ_0

（3）计算相位超前角：$\varphi_c=\gamma-\gamma_0+\varepsilon$，$\varepsilon=5°\sim20°$

（4）取$\varphi_m=\varphi_c$，计算$\alpha=\frac{1-sin\quad m}{1+si\quad m}$

（5）在原系统伯德图中找出增益为$-10lg\frac{1}{\alpha}$的频率即为校正后系统的剪切频率，也是最大相位超前角所对应的频率，$\omega_m=\omega_c$

（6）根据$\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}}$算出 τ

相位超前校正不能使系统的低频得到改善，同时抗高频干扰能力变差。超前校正可以增加系统相角裕度和剪切频率增大

2.相位滞后校正：$G_c(s)=\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}$，$\beta>1$

利用滞后幅频特性使系统剪切频率减小从而增大相角裕度，但要避免最大相位滞后角出现在剪切频率的附近

步骤：

（1）根据要求确定 K

（2）求出原系统的相角裕度γ_0

（3）找出原系统$-180°+\gamma_1+\varepsilon$处的频率$\omega_{c1}$，即为校正后系统的剪切频率，$\gamma=10°\sim15°$

（4）令原系统在ω_{c1}处的增益为$20lg\beta$，来确定 β

（5）取$\omega=\frac{1}{\tau}=(0.2\sim0.5)\omega_c$算出 τ

相位滞后校正可以改善系统的稳态精度，但降低了系统的快速性，同时增加了系统的相角裕度并可以提高对高频干扰的抑制

3.PID 控制器：$u(t)=K_pe(t)+K_i\int_0^t e(\tau)d\tau+K_d\frac{de(t)}{dt}$

P（比例）控制：$G_c(s)=K_p$

I（积分）控制：$G_c(s)=\frac{K_i}{s}$

D（微分）控制：$G_c(s)=K_ds$