

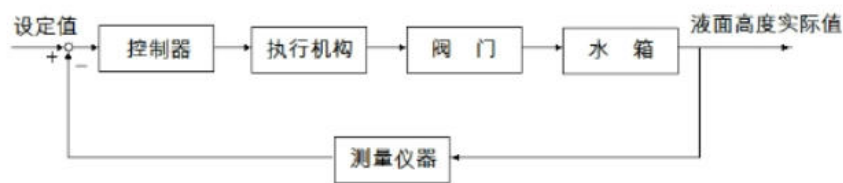
自动控制原理

1 概述

1.1 自动控制定义及举例

- 定义：无人参与情况下控制器→被控对象→按预定要求变化

液面高度自动控制的描述方框图



1.2 自动控制系统的的方式

根据信息传送的特点：

- 开环控制系统
 - 无反馈
 - 优点：结构简单、稳定性好、调试方便、成本低
 - 缺点：抗扰动能力差
- 闭环控制系统
 - 有反馈信号
 - 优点：抑制扰动能力强
 - 缺点：系统复杂性高，易失稳
- 复合控制系统（开环+闭环）

1.3 闭环控制系统的组成

- 控制器
 - 给定环节
 - 比较环节
 - 校正环节
 - 放大装置
- 执行机构
- 被控对象
- 检测部件

1.4 自动控制系统的分类

1.4.1 按照方程分类：

- 线性系统
 - 线性微分方程/差分方程描述
- 非线性系统

- 非线性方程描述

1.4.2 按照设定值特点分类

- 恒值调节系统（给定值定常）
- 程序调节系统（给定值为时间函数）
- 随动调节系统（具有反馈性）

1.4.3 按照信号传递的连续性分类：

- 连续系统（时间的连续函数）
 - 可用 ODE 描述
- 离散系统（存在脉冲序列/数字编码）
 - 如数控系统、采样系统

1.4.4 按照参数是否为定常分类：

- 定常系统
- 时变系统

1.4.5 按照系统输入输出信号数量分类：

- SISO (Single Input Single Output)
- MIMO (Multiple Input Multiple Output)

1.5 对自动控制系统的基本要求

- 稳定性：抗失稳能力
- 动态特性：超调量不能太大、要求调节的时间比较短
- 稳态特性：减小稳态误差（高效性）
 - 稳态误差：系统给定值与系统稳态输出之间的偏差（准确性）

2 线性系统的数学模型

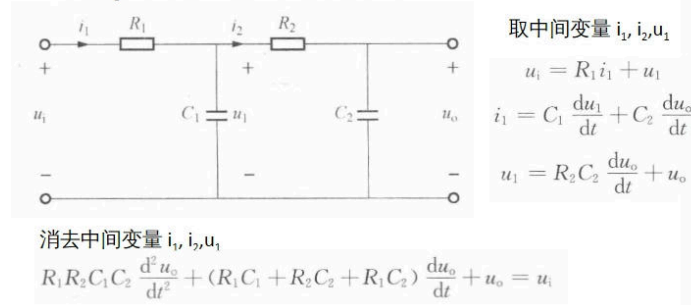
- **控制系统的数学模型：**描述系统输入、输出及内部变量之间的关系的数学模型：
 - 微分方程
 - 传递函数（各类变换）
 - 信号流图
 - 频率特性图
 - 状态空间表达式
- **模型建立方法：**
 - 解析法
 - 实验法
- **线性系统：**能用线性微分方程描述的系统

2.1 线性系统的微分方程描述

一般式：

$$\frac{a_n(d^n c(t))}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} = \frac{b_m(d^m r(t))}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \quad (1)$$

- 例 2-2 二阶 RC 网络，左边为输入 u_i ，右边为输出 u_o ，求系统描述微分方程



- 负载效应：后级系统对前级系统的影响称为负载效应
- 相似系统：不同的物理系统可以有相似的描述微分方程
- 非线性微分方程的线性化：一般使用泰勒级数展开进行局部线性化

2.2 线性系统的传递函数描述

- 传递函数：控制系统在复域内的数学模型
- 定义：在零初始条件下，其输出拉氏变换与其输入拉氏变换之比：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \quad (2)$$

2.2.1 传递函数的性质及特点

- 仅用于线性定常系统
- 仅与系统的结构和参数有关，与输入无关
- 只是输入输出关系的描述，不反映中间变量
- 不同物理系统可具有相同传递函数
- 系统传递函数 $G(s)$ 的拉氏反变换即系统的单位脉冲响应

2.2.2 常见形式

- 有理分式形式：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^{m-i}}{\sum_{j=0}^n a_j s^{n-j}} \quad (3)$$

- 零、极点形式：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{a_0} \times \frac{Q(s)}{P(s)} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \quad (4)$$

- 时间常数形式

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m}{a_n} \times \frac{Q(s)}{P(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n-\nu} (T_j s + 1)} \quad (5)$$

- 实系数

$$G(s) = \frac{K}{s^\nu} \times \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\xi_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\xi_l T_l s + 1)} \quad (6)$$

2.2.3 典型环节的数学模型及特性

• 比例(P)环节

- 分压器
- 齿轮传动
- 运放放大

$$G(s) = K \quad (7)$$

• 惯性环节

- 电容电路
- 热容对象

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (8)$$

• 积分(I)环节

- 滞后性
- 记忆性
- 常用于改善系统稳态性能

• 微分(D)环节

- 常用于加快控制调节过程

• 比例微分(PD)环节

• 二阶振荡环节

• 延迟环节

- 时滞、纯滞后
- 代表信号传递上的延迟

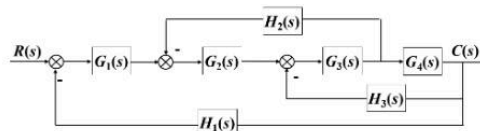
$$G(s) = e^{-\tau s} \quad (9)$$

2.2.4 动态结构图(框图)

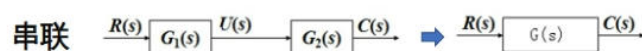
- 反映系统中各变量之间的关系以及信号的传递过程，一般与传递函数配合使用，以获取复杂系统的传递函数

• 框图的组成

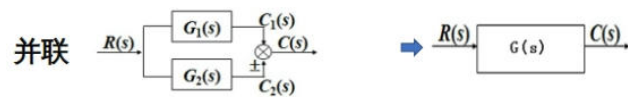
- 信号线：代表信号传输，具有方向性，有的上标函数
- 方框（环节）：作用是沿箭头方向对信号进行变换，其输出等于输入乘以框内函数
- 引出点：某些地方称为测量点，表示信号引出
- 综合点：某些位置称为比较点，对进行信号加减运算



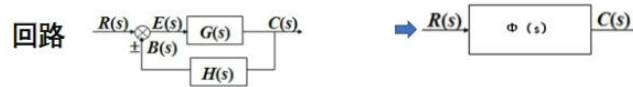
• 环节合并



$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \quad (10)$$



$$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s) \quad (11)$$



$$G(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)} \quad (12)$$

• 综合点

• 综合点后移



• 综合点前移



• 引出点

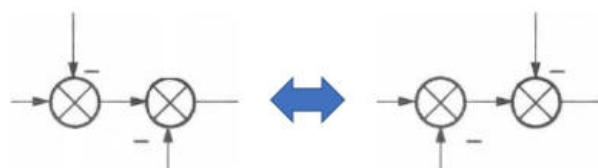
• 引出点前移



• 引出点后移



• 相邻的综合点（引出点）间前后位置可以互换



• 梅森(Mason)公式

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_K \quad (13)$$

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots \quad (14)$$

Δ 称为特征式

Δ_k 称为余子式 (特征式去掉第 k 条前向通道接触回路所在项余下的部分)

P_k 为第 k 条前向通道的传递函数

$\sum L_i$ 为所有不同回路的传递函数和

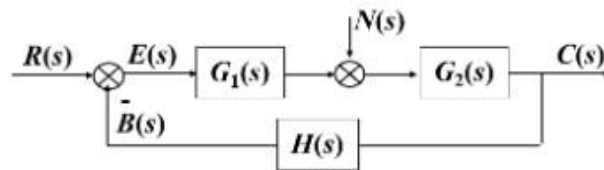
$\sum L_i L_j$ 为所有两两不接触回路的传递函数乘积之和

$\sum L_i L_j L_k$ 为所有三个互不接触回路的传递函数乘积之和

回路符号由正负反馈决定

2.2.5 闭环控制系统几种传递函数

• 考虑扰动



开环传递函数

$$W(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s) \quad (15)$$

前向通路传递函数 × 反馈通路传递函数

无扰动闭环传递函数

$$W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (16)$$

无扰动 ($N(s) = 0$) 输入 $R(s)$ 系统传递函数

有扰动闭环传递函数

$$W(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (17)$$

无输入 ($R(s) = 0$) 干扰 $N(s)$ 系统传递函数

输入信号与干扰同时作用下的系统输出

$$\begin{aligned}
 C(s) &= \Phi(s)R(s) + \Phi_{N(s)}N(s) \\
 &= \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)
 \end{aligned} \quad (18)$$

无输入 ($R(s) = 0$) 干扰 $N(s)$ 系统传递函数

误差传递函数

$R(s)$ 作用下

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1G_2H} \quad (19)$$

反映跟随输入信号的能力

$N(s)$ 作用下

$$\frac{E(s)}{N(s)} = -G_2 \frac{H}{1 + G_1G_2H} \quad (20)$$

反映抗干扰能力

3 时域分析法

3.1 时域分析基础

- 定义：拉氏变换后，分析系统响应曲线，以获取**稳定性、快速性、准确性**描述的**定量指标**，应需找出这类指标与控制系统参数间的关系
- 典型处事状态：零状态
- 典型输入信号：
 - 单位阶跃（恒值控制系统）
 - 单位斜坡、单位加速度（随动控制系统）
 - 单位脉冲（扰动分析）
 - 单位正弦
- 控制系统性能指标：
 - 动态性能指标
 - 稳态性能指标
- 阶跃响应性能指标

- 上升时间 t_r : 响应曲线首次到达稳态值所需的时间 (or from steady state 10% to 90%)
- 峰值时间 t_p : 响应曲线首次到达峰值所需时间
- 调整时间 t_s : 响应与稳态值偏差达到规定值 Δ , 且不再超过 Δ 所需最短时间 (一般 $\Delta = 2\%C(\infty)$ or $5\%C(\infty)$)
- 超调量 $\sigma\%$: 系统输出量的最大值超过稳态值的百分比:

$$\sigma\% = \frac{c(t_{\max}) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \quad (21)$$

- 振荡次数 N : 在调整时间 t_s 内, $c(t)$ 围绕 $c(\infty)$ 振荡的次数
- 稳态误差 e_{ss} , 系统期望值与 $c(\infty)$ 之间的差值

3.2 一阶、二阶系统的时域分析

3.2.1 一阶

- $c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$
- $t_s = 3T$, (5%误差带)
 $= 4T$, (2%误差带)
- $e_{ss} = 0$
- $\sigma\% = 0$

3.2.2 二阶

3.2.2.1 数学模型

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \quad (22)$$

ω_n : 自然频率 (无阻尼振荡角频率)

T : 系统振荡周期

ξ : 阻尼比

$\omega_d = \zeta\omega_n, \zeta = \sqrt{1 - \xi^2}$: 阻尼振荡角频率

$\sigma = \xi\omega_d$: 衰减系数

$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$: 阻尼角

特征方程:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (23)$$

特征根:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (24)$$

3.2.2.2 阶跃响应

- 负阻尼

$\xi < 0$

- 零阻尼

$\xi = 0$

- 欠阻尼

$$0 < \xi < 1$$

- 临界阻尼

$$\xi = 1$$

- 过阻尼

$$\xi > 1$$

3.2.2.3 性能指标

- 上升时间

$$t_r \Leftrightarrow \omega_d t_r + \varphi = \pi \quad (25)$$

- 峰值时间

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \Leftrightarrow \left. \frac{dC(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0 \quad (26)$$

- 超调量

$$\sigma\% = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} \times 100\% \quad (27)$$

保证平稳性，一般取 $\xi = 0.4 \sim 0.8$ ，最佳阻尼比 $\xi = 0.707$

- 调整时间

考察包络线

$$t_s = -\frac{1}{\xi\omega_n} \ln(\Delta\sqrt{1-\xi^2}) \Leftrightarrow \left| \frac{e^{-\xi\omega_d t_s}}{\sqrt{1-\xi^2}} \right| \leq \Delta \quad (28)$$

$$t_s = \begin{cases} \frac{3}{\xi\omega_n} (\Delta = 5\%, 0 < \xi < 0.9) \\ \frac{4}{\xi\omega_n} (\Delta = 2\%, 0 < \xi < 0.9) \end{cases} \quad (29)$$

3.2.3 问题分析

- 已知传递函数，求性能指标
- 已知系统传递函数形式（带参数），求性能指标（随参数）变化
- 已知系统传递函数形式及性能指标要求，求系统参数

3.2.4 改善措施

- 系统误差信号-微分比例控制
- 输出量的速度控制

3.3 稳定性分析

- 考虑初始状态的拉氏变换

$$D(s)C(s) = M(s)R(s) + M_0(s) \quad (30)$$

$D(s) = \Pi(s - p_i)$ 为系统特征方程

3.3.1 线性系统稳定的充要条件

- 系统输入为 0 时

$$C(s) = \frac{M_0(s)}{D(s)}$$

系统稳定 ($\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$) $\Leftrightarrow$ 特征方程 $D(s)$ 的根具有负实部

• 稳定性判据

赫尔维茨 Hurwitz 判据: 系统稳定 $\Leftrightarrow$ 赫尔维茨行列式 D_k 的值全部为正

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & \dots & a_{2k-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1} \end{vmatrix} \quad (31)$$

Lienard-Chipard 判据 系统稳定 $\Leftrightarrow$

- 特征方程每个系数均大于零
- 奇数阶或偶数阶的 Hurwitz 行列式值大于零

劳斯 Ruth 判据 系统不稳定 $\Leftrightarrow$ Ruth 表的第一列出现负数

第一列数据从上至下符号改变次数即为正实部根的个数

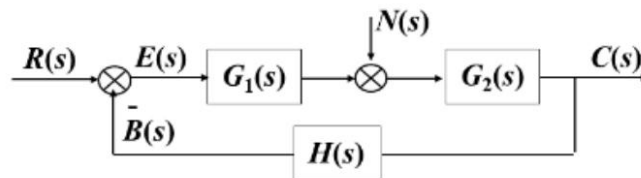
s^5	a_0	a_2	a_4	$\dots$	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$
s^{5-1}	a_1	a_3	a_5	$\dots$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$
s^{5-2}	b_1	b_2	b_3	$\dots$	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$
s^{5-3}	c_1	c_2	c_3	$\dots$	
s^2	e_1	e_2			
s	f_1				
s^0	第1列				

第 i 行第 j 列的元素 $x(i, j)$

$$x(i, j) = \frac{x(i-1, 1)x(i-2, j+1) - x(i-2, 1)x(i-1, j+1)}{x(i-1, 1)}$$

- 若 $x(i, 1) = 0$, 但 $x(i, j) \neq 0$, 此时令 $x(i, 1) = \varepsilon > 0$
- 若 $x(i, j) = 0$, 此时用上一行系数构造方程对其求导, 用所得方程系数替代该行

3.4 稳态误差分析



$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$\text{稳态误差 } e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

【终值定理使用充要条件: $sE(s)$ 所有极点均为正实数根】

$$\begin{cases} E_{rs}(s) = R(s)\Phi_{ER}(s), \Phi_{ER}(s) = \frac{1}{1+G_1G_2H} \\ E_{ns}(s) = N(s)\Phi_{EN}(s), \Phi_{EN}(s) = \frac{-G_2H}{1+G_1G_2H} \end{cases} \quad (32)$$

$$e_{ss} = e_{rs} + e_{ns} \quad (33)$$

3.4.1 不考虑扰动



时间常数形式的开环传递函数

$$\frac{K(\prod_{i=1}^m(\tau_i s + 1))}{s^\nu \prod_{j=1}^{n-\nu}(T_j s + 1)} \quad (34)$$

$\nu = 0$ 为 0 型系统, $\nu = 1$ 为 I 型系统, $\nu = 2$ 为 II 型系统...

单位阶跃信号下 $R(s) = \frac{1}{s}$:

• 0 型系统

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$$

K_p 为静态位置误差系数

• I 型及以上系统

$$e_{ss} = 0$$

若需要无差跟踪, 则开环传递函数需要 I 型及以上系统, 即至少需一个积分环节

单位斜坡输入信号下 $R(s) = \frac{1}{s^2}$:

• 0 型系统

$$e_{ss} = \infty$$

• I 型及系统

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

K_v 为静态速度误差系数

• II 型系统

$$e_{ss} = 0$$

若需要无差跟踪, 则开环传递函数需要 II 型及以上系统, 即至少需两个积分环节

单位加速度输入信号下 $R(s) = \frac{1}{s^3}$:

• 0、I 型系统

$$e_{ss} = \infty$$

• II 型系统

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

K_a 为静态加速度误差系数

• III 型系统

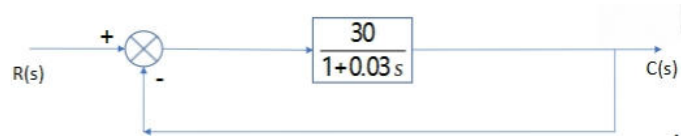
$$e_{ss} = 0$$

若需要无差跟踪, 则开环传递函数需要 III 型及以上系统, 即至少需三个积分环节

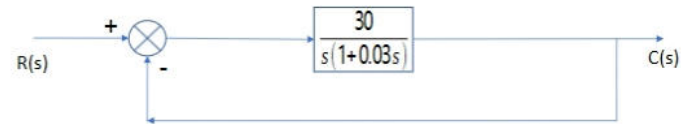
3.5 稳态误差与稳定性

两者存在内在矛盾

如下阶跃输入系统稳定，但有稳态误差



若增加积分环节，无稳态误差，但增加振荡（二阶欠阻尼系统）



若再增加环节，则不稳（特征方程存在系数为0）

3.5.1 考虑扰动

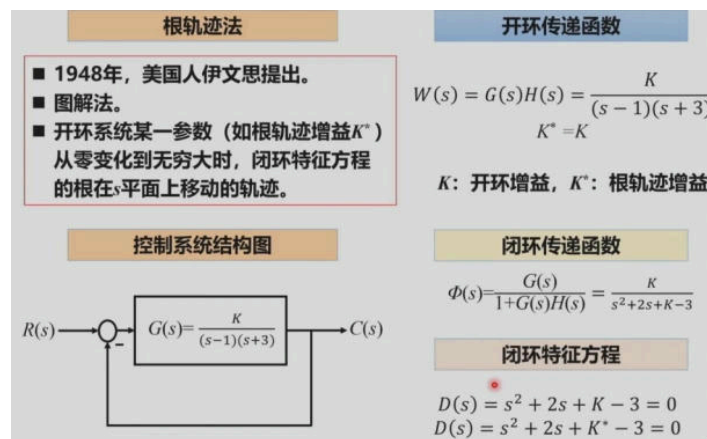
扰动 $N(s)$ 为 ν_n 阶时， $R(s)$ 阶数 ν_r 需在 ν_n 以上，才能使得扰动稳态误差为零

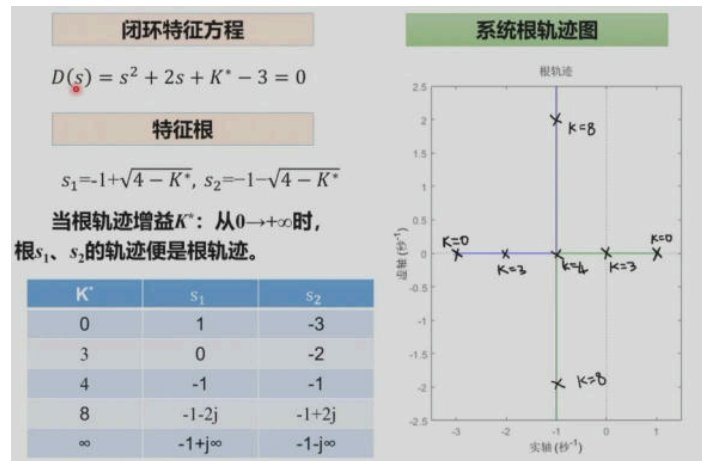
4 根轨迹法

开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)} = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (35)$$

其中 K ：开环增益， K^* ：根轨迹增益





• 临界开环增益

$$\begin{cases} 0 < K < 3, \text{系统不稳定} \\ K = 3, \text{临界开环增益} \\ K > 3, \text{系统稳定} \end{cases}$$

• 动态性能

$$\begin{cases} 3 < K < 4, \text{特征根为负实数, 系统过阻尼, 阶跃响应单调上升非周期} \\ K = 3, \text{特征根实重根, 系统临界阻尼, 阶跃响应单调上升且速度快} \\ K > 3, \text{特征根为共轭复根, 系统欠阻尼, 阶跃响应为振荡衰减} \end{cases}$$

4.1 闭环与开环零、极点关系

• 前向通道传递函数:

$$G(s) = \frac{K_G^* \prod_{i=1}^f (s - z_i)}{\prod_{i=1}^q (s - p_i)} \quad (36)$$

• 反馈通道传递函数:

$$H(s) = \frac{K_H^* \prod_{j=1}^l (s - z_j)}{\prod_{j=1}^h (s - p_j)} \quad (37)$$

开环系统根轨迹增益: $K^* = K_G^* K_H^*$

闭环传递函数 = $f(K^*, z_i, p_i)$

闭环特征方程 (180° 根轨迹)

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 0 \Rightarrow G(s)H(s) = -1 \\ \Rightarrow |G(s)H(s)| &= \frac{K^* \prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = 1 \quad (\text{幅值方程}) \\ \Rightarrow \angle(G(s)H(s)) &= \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k+1)\pi \quad (\text{相角方程}) \end{aligned} \quad (38)$$

4.2 基本方法 (负反馈)

• 法则 1: 分支数: $\max(m, n)$

• 法则 2: 连续性与对称性: 根轨迹连续且对称于实轴

• 法则 3: 起点与终点:

- 起点: 开环极点, $K^* = 0$
- 终点: 开环零点, $K^* = +\infty$

- **法则 4:** 实轴上的根轨迹: 若实轴上某一区域右侧开环实数零、极点的个数和为奇数, 则该区域必是根轨迹
- **法则 5:** 根轨迹的渐近线: $n > m$ 时, 有 $n - m$ 条渐近线

$$\text{渐近线族与实轴夹角满足 } \varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$$\text{交点满足 } \sigma = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

- **法则 6:** 根轨迹的起始角和终止角:

$$\text{起始角: } \theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left[\sum_{i=1}^m \angle(p_i - z_i) - \sum_{j=1, i \neq j}^n \angle(p_i - p_j) \right]$$

$$\text{终止角: } \varphi_{z_i} = (2k+1)\pi - \left[\sum_{i=1, i \neq j}^m \angle(z_i - z_j) - \sum_{j=1}^n \angle(z_i - p_j) \right]$$

- **法则 7:** 根轨迹的分离点: ≥ 2 的根轨迹在 s 平面上相遇又分离的点

- 坐标 d 满足

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{d - p_j} \right) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{d - z_i} \right) \quad (39)$$

- **法则 8:** 根轨迹与虚轴的交点: 在闭环特征方程中令 $s = jw$, 解得临界稳定点 $w \Rightarrow K^*$

- **法则 9:** 根之和:

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i, \quad (n - m \geq 2) \quad (40)$$

4.3 广义根轨迹

将 K^* 更改为其他参数

4.4 系统性能

- **主导极点** (离虚轴最近且附近没有闭环零点的一些闭环极点) $\Rightarrow$ 对动态性能影响最大

- **偶极子** (一对靠的很近的闭环零极点) $\Rightarrow$ 偶极子内零极点可相互抵消

保留主导极点, 去掉非主导极点及偶极子

5 频域分析法

5.1 频率特性

- 控制系统在正弦信号下的稳态输出:

n 阶线性定常系统闭环传递函数:

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^{m-i}}{\prod_{j=1}^n (s - s_j)} \quad (41)$$

输出信号: $r(t) = A_r \sin(\omega t)$

输出响应: $c(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t} + A_c \sin(\omega t + \varphi)$

$$A_c = |\Phi(j\omega)| A_r, \varphi = \angle \Phi(j\omega)$$

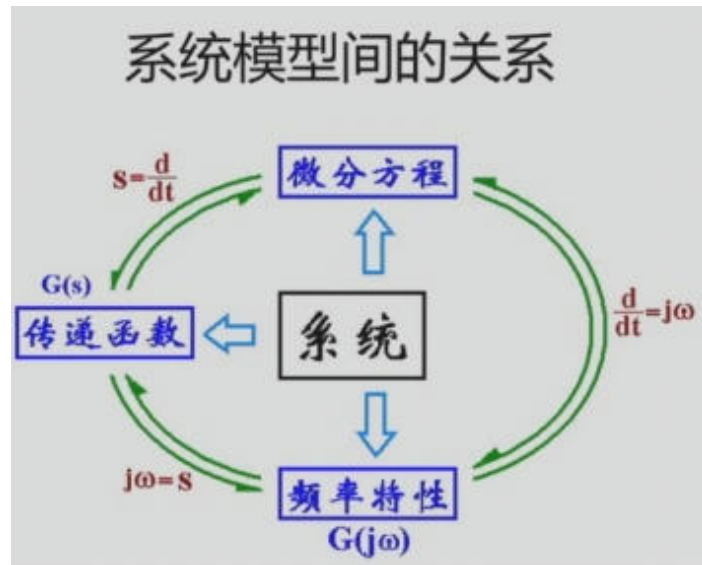
- **幅频特性**

$$A(\omega) = |\Phi(j\omega)| \quad (42)$$

- **相频特性**

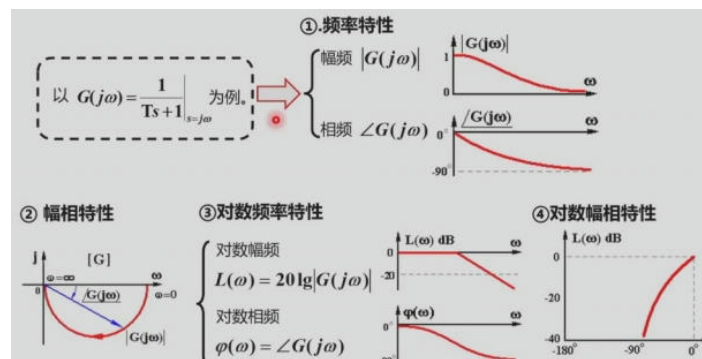
$$\varphi(\omega) = \angle \Phi(j\omega) \quad (43)$$

统称幅相频率特性



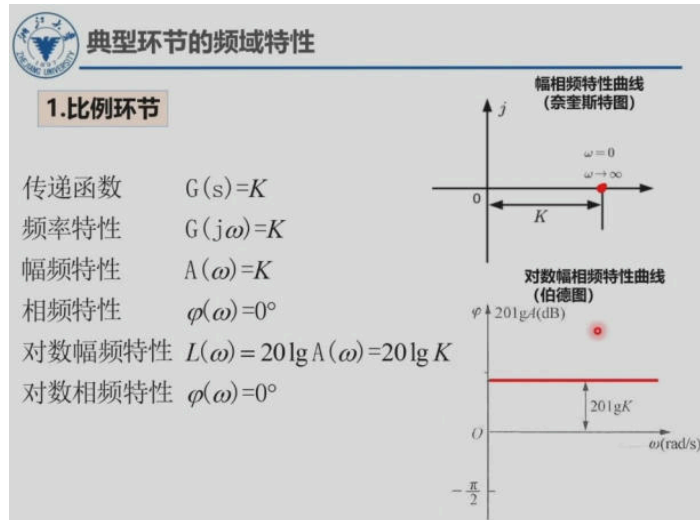
常用曲线：

- 幅相特性曲线
- 对数特性曲线

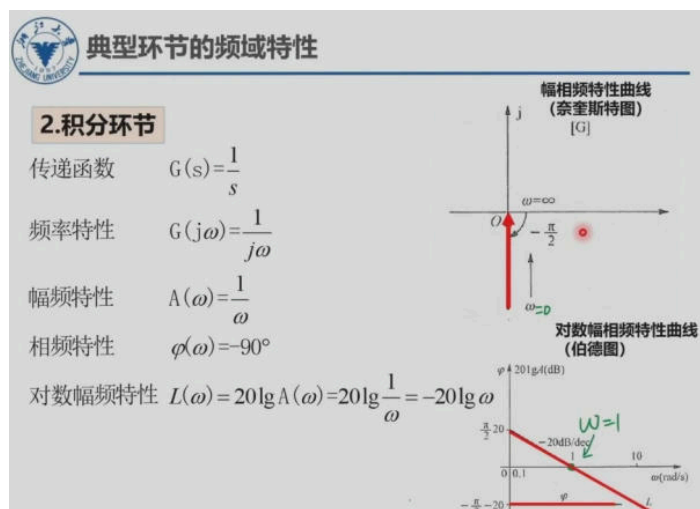


5.2 典型环节的频域特性

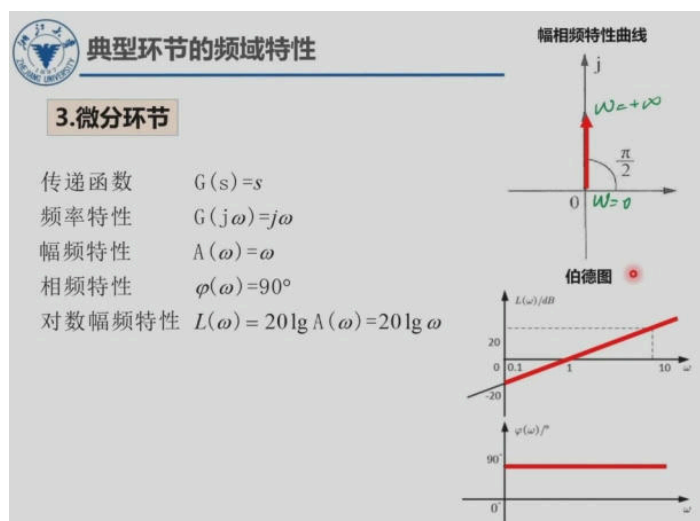
- 比例环节



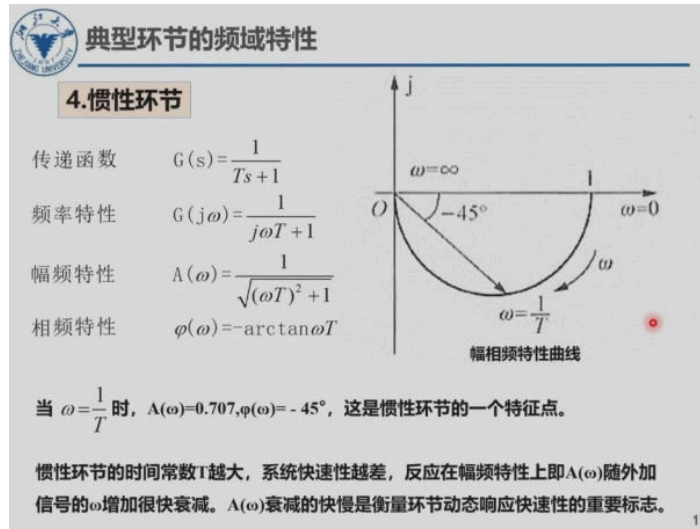
• 积分环节



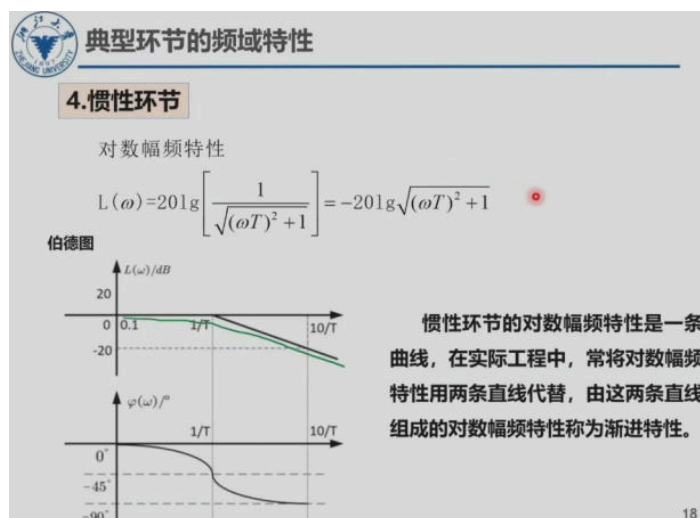
• 微分环节



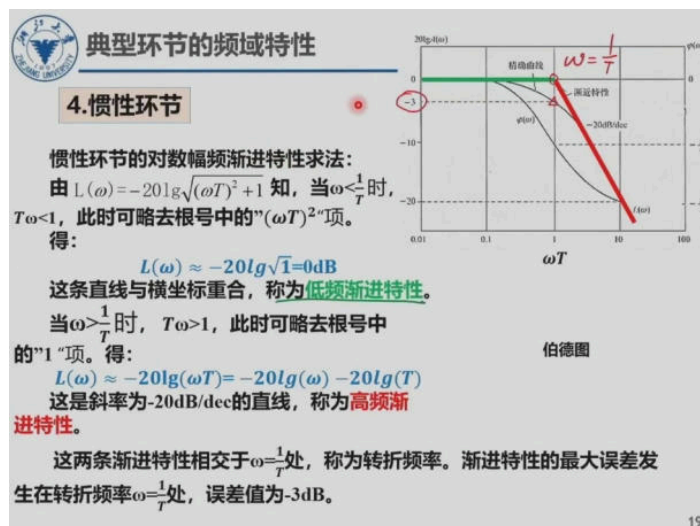
• 惯性环节



17

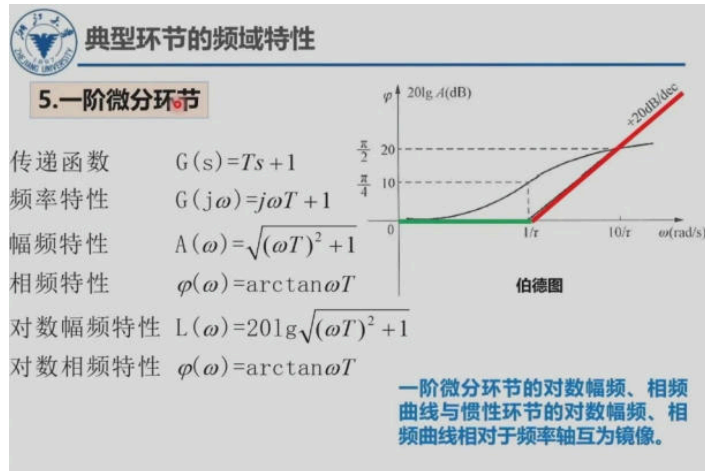


18

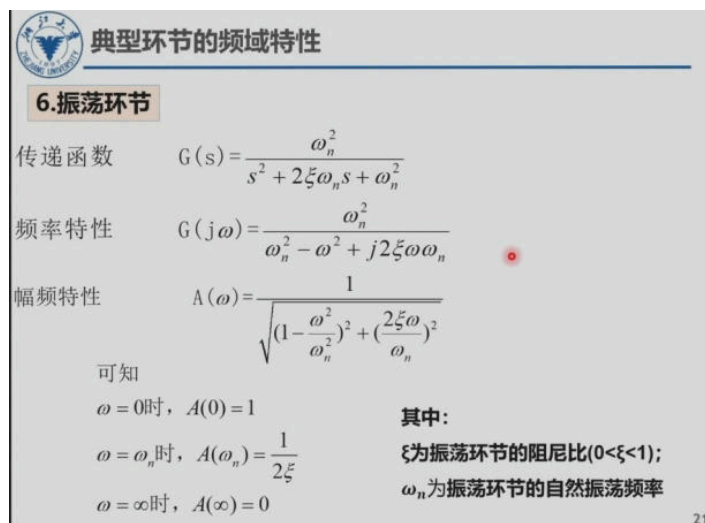


19

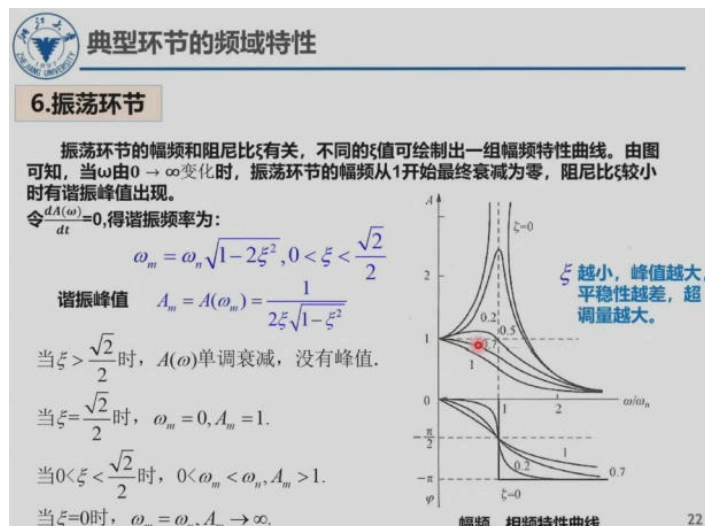
• 一阶微分环节



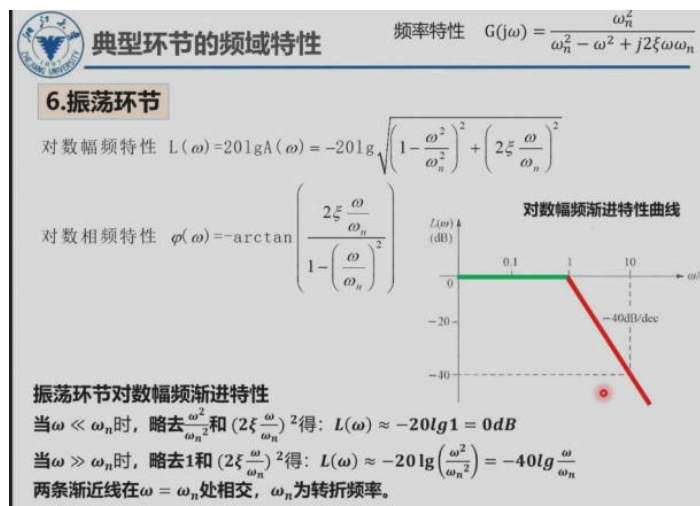
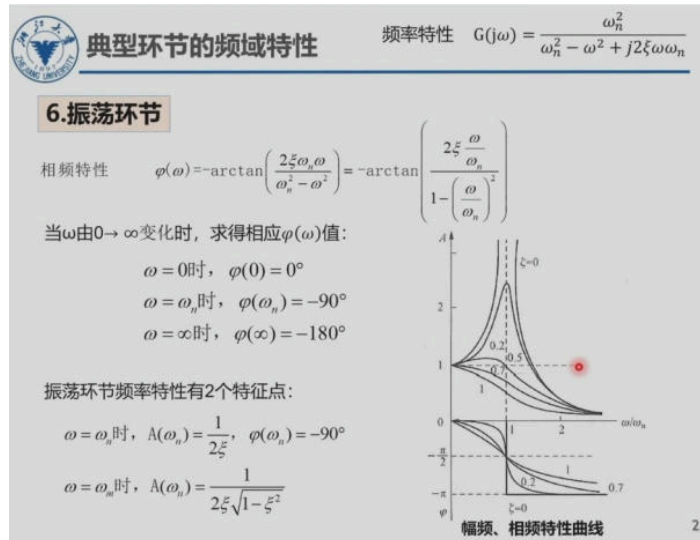
• 振荡环节



21



22



• 二阶微分环节

振荡环节关于横轴对称

5.3 绘制奈奎斯特图

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n-\nu} (T_j s + 1)} \quad (44)$$

$$A(\omega) = \frac{K \prod_{i=1}^m \sqrt{\tau_i^2 \omega^2 + 1}}{\omega^\nu \prod_{j=1}^{n-\nu} \sqrt{T_j^2 \omega^2 + 1}} \quad (45)$$

$$\varphi(\omega) = -\nu 90^\circ + \sum_i^m \arctan(\tau_i \omega) - \sum_j^{n-\nu} \arctan(T_j \omega) \quad (46)$$

5.4 稳定性分析

5.4.1 奈奎斯特稳定判据

闭环系统的开环传递函数 $G(s)H(s)$

作出其奈奎斯特图, P 为其正极点, N 为 s 绕右半平面旋转半圈时, $G(s)H(s)$ 绕 -1 的圈数 (逆时针为正), Z 为正零点, 即闭环传递函数的正极点

$$Z = P - 2N = 0$$

5.4.2 对数频率稳定判据

闭环系统的开环传递函数 $G(s)H(s)$

作出其奈奎斯特图或伯德图（频相图以 -180° 为界）， P 为其正极点数， N_+ 为正穿越数， N_- 为负穿越数（穿越指从 -1 右侧穿过实轴，逆时针为正）， $G(s)H(s)$ 绕 -1 的圈数， Z 为正零点数，即闭环传递函数的正极点

- 半穿越：取 $\pm 1/2$

$$Z = P - 2(N_+ - N_-) = 0$$

5.4.3 系统的相对稳定性及稳定裕量

- 相对稳定性：
- 稳定裕量：衡量一个闭环稳定系统稳定程度的指标
- 相角裕量：模值等于 1 处矢量与负实轴的夹角

$$\gamma = \varphi(\omega_c) + 180^\circ \quad (47)$$

$\gamma < 0 \Rightarrow$ 曲线包围 $(-1, j0)$ ，系统不稳定

$\gamma > 0 \Rightarrow$ 闭环系统稳定

- 幅值裕量

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|} \quad (48)$$

ω_g 为 -180° 时对应频率

5.4.4 开环闭环性能关系

- 低频段

主要由开环增益和积分环节决定（决定型别：0、I、II 等）

稳态误差与：开环增益、型别有关 $K \uparrow, \nu \uparrow \Rightarrow$ 系统稳态性能越好

- 中频段

对系统动态性能影响较大，集中反映系统的平稳性与快速性

若开环斜率为 -20dB/dec ，可认为 I 型系统，无振荡，平稳性好

若开环斜率更负，则平稳性变差（ $-40\text{dB/dec} \Rightarrow$ 临界稳定）

剪切频率 $\omega_c \uparrow$ ，调节时间 $t_s \downarrow$ ，系统快速性越好，但可能稳定裕度越低

- 高频段

高频幅值越大，则抗干扰能力越弱

5.4.5 闭环频率特性与动态性能关系

幅频特性曲线：

- 零频幅值 M_0

$$\frac{M(0)}{M_0} = 1 \quad (49)$$

- 谐振峰值 M_r
- 谐振频率 ω_r

$$\frac{M(\omega_r)}{M_0} = M_r \quad (50)$$

- 带宽频率（闭环截止频率） ω_b

$$\frac{M(\omega_r)}{M_0} = 0.707 \quad (51)$$