

随机过程

一. 预备知识

标准正态: $X \sim N(0, 1)$ $\phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

且: $\phi(-x) = \phi(1-x)$

非标准正态: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $P(X \leq x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

数学期望: 离散 $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k$

连续: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

方差/标准差 $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$ / $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

$$D(aX+c) = a^2 D(X).$$

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$$

Cov 下

协方差: $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$\text{Cov}(aX_1 + bX_2 + c, Y) = a\text{Cov}(X_1, Y) + b\text{Cov}(X_2, Y)$$

$$\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(X, Y).$$

相关系数 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X) \cdot D(Y)}}$

中心极限定理: $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, $E(X_i) = \mu$,

$$D(X) = \sigma^2. \text{ 则当 } n \rightarrow \infty \text{ 时,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq x\right) = \phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$



二. 随机过程基本概念.

1. 定义:

样本空间 S , 概率 P , $T \subset \mathbb{R}$, 任意 $t \in T$, $X(t)$ 是 S 上的随机变量, 则称 $\{X(t); t \in T\}$ 是 S 上的随机过程.

2.

V_n 表示前 n 次赢的次数; W_n 表示恰好赢 n 次时刻

$$\{W_k > n\} = \{V_n < k\} \quad \{W_k \leq n\} = \{V_n \geq k\}$$

$$\{W_k \leq n-1\} = \{V_{n-1} \geq k\} \quad \{W_k > n-1\} = \{V_{n-1} < k\}.$$

3. 基本公式.

均值函数: $\mu_X(t) = E(X(t))$

均方值函数: $\psi_X^2(t) = E(X^2(t))$

方差函数: $\sigma_X^2(t) = D_X(t) = D(X(t))$

标准差函数: $\sigma_X(t) = \sqrt{D(X(t))}$

自相关函数: $R_X(t, s) = E(X(t) \cdot X(s))$

自协方差函数: $C_X(t, s) = \text{Cov}(X(t), X(s)) = E(X(t) \cdot X(s)) - E(X(t)) \cdot E(X(s))$
 $= R_X(t, s) - \mu_X(t) \cdot \mu_X(s)$

$D_X(t) = C_X(t, t)$



NO

Date

eg: $X(t) = a \cos(\omega t + \theta)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $\theta \sim U[0, 2\pi]$.

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_0^{2\pi} a \cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

密度函数
θ为变量

$$R_X(t, s) = E[X(t) \cdot X(s)] = \int_0^{2\pi} a^2 \cos(\omega t + \theta) \cdot \cos(\omega s + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \cos[\omega(s-t)]$$

互相关函数 $R_{XY}(t, s) = E[X(t) Y(s)]$

互协方差函数 $C_{XY}(t, s) = \text{Cov}(X(t), Y(s)) = E[X(t) Y(s)] - E[X(t)] E[Y(s)]$



三. 马尔可夫链.

1. 定义.

$$P(S_{n+1}=j | S_1=i_1, \dots, S_{n-1}=i_{n-1}, S_n=i_n) = P(S_{n+1}=j | S_n=i_n).$$

S_{n+1} 只与上一状态有关, 与以前无关.

转移概率.

$$\text{记 } P_{ij} = (m, m+n) = P(X_{m+n}=j | X_m=i).$$

为 m 时处于状态 i 条件下, 经过 n 步后转移到 j .

$$\text{记 } \bar{P}(m, m+n) = (P_{ij}(m, m+n))_{i,j}$$

为对应的 n 步转移矩阵.

若 $P_{ij} = P(X_{m+n}=j | X_m=i)$ 不依赖于 n . 则称 $\{X_n\}$ 是 时齐马氏链. P_{ij} 称为 一步转移概率.

2. 常返和暂留.

$$\tau_i = \inf\{n \geq 1; X_n=i\}. \quad (\text{到达 } i \text{ 点所花时间})$$

若 $P(\tau_i < \infty | X_0=i) = 1$, 则称 i 常返. 一定时间内, 必回原点. 否则称 i 暂留.

$$\text{令 } \mu_i = E(\tau_i | X_0=i) \quad \text{平均回转时.}$$

$\mu_i < \infty$, 正常返. 否则零常返.

令 $f_{ij}^{(n)} = P(X_n=j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0=i)$ 表示从 i 出发, 首次击中 j 的概率



NO

Date

重要
 i 常返 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}$

周期: $d(i)$ 为集合 $\{n: n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 中最大公约数
 若 $d(i) = 1$, 则称 i 非周期.

若状态 i 正常返且非周期, 称 i 为遍历状态

重点作业:

✓ 2.14. 2.9. 3.8. 3.19. 3.21.

✓ 4.14 4.15. 4.21 4.23 + 书 P.71 4.3.6 ✓

5.4 ✓ 5.9 ✓

5.15 5.17 很综合.

P.92. 傅里叶.

P.91 5.3.1

+5.3.2

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt$$

$$\langle X(t) X(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) X(t+\tau) dt$$

$$\tilde{B}(t) = t B\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$N(t) - N(s) = k \approx \frac{[\int_s^t \lambda(h) dh]^k}{k!} \cdot e^{-\int_s^t \lambda(h) dh}$$



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App

NO

Date

$$\text{cov}(B(3), 2B(1)) = \min(3, 1)$$

$$= 2\text{cov}(B(3), B(1)) = 2\min\{3, 1\} = 2.$$

