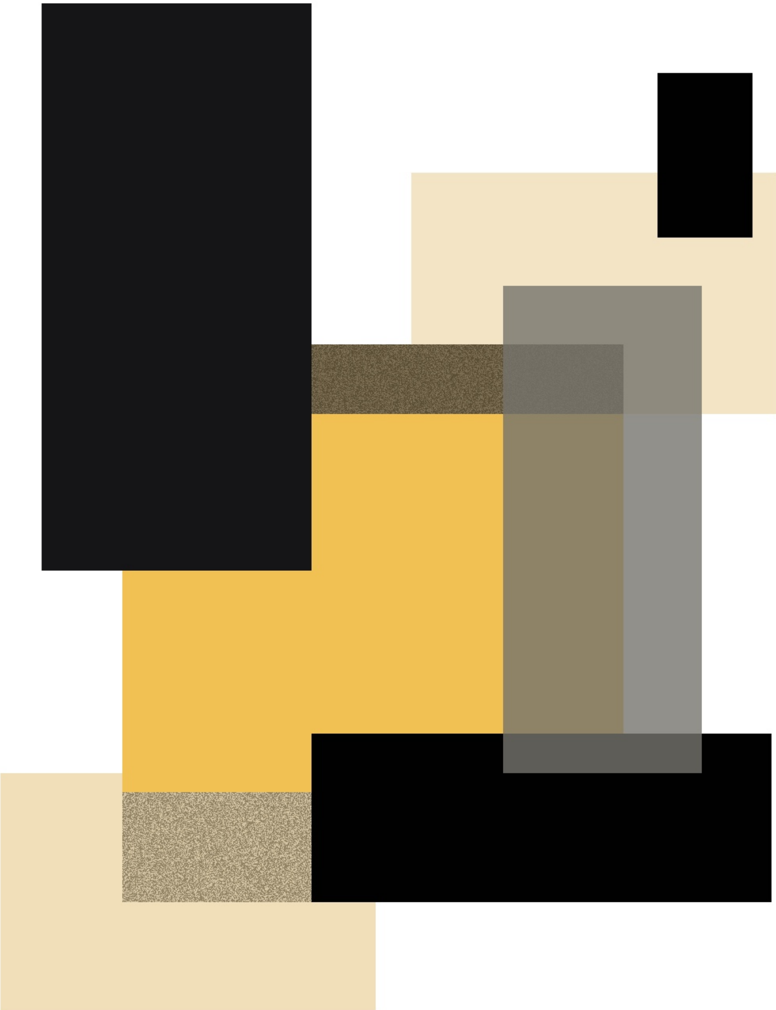


Cornell Notes

Title

重点

《概率论与数理统计》第二版

ISBN 978-7-04-060272-2

第1章	第2章	第3章	第4章	第5章	第6章	第7章	第8章	第9章
A1	B2	A3	B3	A3	A3	B1	A2	A3
A4	B7	A5	B5	B2	A5	A3	B1	A4
B1	B8	A10	A2	B6	B1	A5	A8	A11
A12	B9	A13	A4	B7	B4	A7	A13	
A14	B11	B4	B6	B9	A7	A9	B5	
A15	B12	A16	B12	B11	A9	B5	B9	
A16	B14	A20	A12		A11	B8		
A19	B16	B6	B20		B2(7,8)	A12		
B3	B17	A27	A16		B10	A14		
B4	A13	B10	B24			A16		
A20	B23	A32	A19			A18		
A23	B24	A36	B31					
A25	B27	A38	B33					
B6	B29		B34					
A33	B32							
A34	B33							
B8	B34							

- **总评成绩 = 平时成绩60% + 期末卷面成绩40%**

  平时成绩包括：

  ① 课后作业与到课率：**25%**

  ② 学在浙大上参与讨论：**5%**

  ③ 学在浙大上的三次测验：**30%**

- 不及格情况：

  ① 基于以上计算式得到的总评成绩低于**60**

  ② 期末成绩低于某分值(由课程组讨论研究确定)

  ③ 不交作业及旷课次数达到学校规定或比例

次序	内容	日期时间
测验1	前第2章	10月27日（周日）21:30-22:30
测验2	前第4章	11月23日（周六）21:30-22:30
测验3	前第7章	12月20日（周五）21:30-22:30

- 每次测验由8个单选题和2个多选题组成；
- 多选题少选或选错都不得分；
- 测验时间统一，在60分钟内完成；
- 测验为开卷，需要独立完成，如果发现讨论或交流答案，按违纪处理；
- 开启防作弊系统，离开视窗若干次，终止答题自动提交，所以建议在电脑上完成，不要在手机和pad上进行；
- 用建议的谷歌浏览器，退出聊天工具等。

总结

Cornell Notes

Title

Date

重点

内容

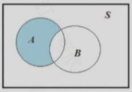
事件 $\begin{cases} \text{随机事件} & \text{一般用 } A,B,C\ldots \\ \text{不可能事件} & \phi \\ \text{必然事件} & S \end{cases}$

$A\cap B = AB$ 交　　$A\cup B$ 并

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$　$A_1, A_2 \ldots A_n$ 并　　$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$　$A_1, A_2 \ldots A_n$ 交

$AB = \phi$　A, B 互斥 / 互不相容

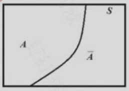
✓ A与B的差事件 $A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$



例：$S=\{1,2,3,4,5,6\}, A=\{1,2,3\}, B=\{1,3,5\}$

则 $A-B=\{2\}$，而 $B-A=\{5\}$

✓ A的逆事件记为$\bar{A}$, $\begin{cases} A\cup\bar{A}=S \\ A\bar{A}=\varnothing \end{cases}$，若 $\begin{cases} A\cup B=S \\ AB=\varnothing \end{cases}$，称$A, B$互逆、对立.



此时有：$B=\bar{A}$, $\bar{B}=\bar{\bar{A}}=A$

A与B的差事件可以表示为 $A-B=A\bar{B}=A\cup B-B=A-AB$

那么 $AB=A-\bar{B}$

交换律：$A\cup B = B\cup A$

$A\cap B = B\cap A$

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=(A\cup C)\cup B$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

对偶律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$　　（德·摩根定律）

$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

对偶律推广：$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\cdots\cup\bar{A}_n$;

$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i=\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n$;

$\bar{A}\bar{B}=\overline{A\cup B}$

$\overline{AB}=\overline{A\cap B}$

总结

$\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}\cup A\bar{B}\cup\bar{A}B$

Cornell Notes

Title

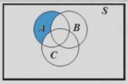
Date

重点

内容

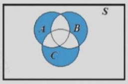
• A发生，B、C都不发生：

$A\bar{B}\bar{C}=A-B-C$



•恰有一个发生：

$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$

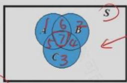


•至少有一个发生：

$A\cup B\cup C=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}=S-\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$=(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)\cup(\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C})\cup ABC$

1 2 3 4 5 6 7

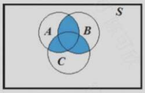


14

•至少有两个发生：

$AB\cup AC\cup BC$

$=\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup ABC$

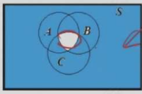


•至少有一个不发生：

$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

$=\overline{ABC}=S-ABC$

$=\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$



1

(1) $A\cup A=A$，$AA=A$，$A-A=\varnothing$

(2) 若$A\subset B$, 则$A\cup B=B$, $AB=A$, $A-B=\varnothing$, $\bar{A}\supset\bar{B}$

$A\cup S=S$, $AS=A$, $A-S=\varnothing$, $S-A=\bar{A}$

(3) 一般，$\bar{A}\bar{B}\neq\overline{AB}$，$\bar{A}\cup\bar{B}\neq\overline{A\cup B}$

(4) 对任意事件B，均有 $A\supset AB$

(5) 若A与B不相容，则AC与BD也不相容

(6) 优先级/书写问题。$A\cup BC=A\cup(B\cap C)$

总结

Cornell Notes

Title

Date

重点

（一）频率

定义：记$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$;其中n_A是A发生的次数（频数）；n是总试验次数。

称$f_n(A)$为A在n次试验中发生的频率。

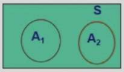
1° $0\le f_n(A)\le 1$

2° $f_n(S)=1$

3° 若$A_1,A_2,\cdots,A_k$两两互不相容，则 $f_n(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i)$ 可加性

且$f_n(A)$随n的增大渐趋稳定，记稳定值为p.

证3° 若$k=2$，$f_n(A_1\cup A_2)=\frac{n_{A_1\cup A_2}}{n}$



18

定义1：$f_n(A)$ 的稳定值p定义为A的概率，记为$P(A)=p$

定义2：将概率视为测度，且满足：

1° $P(A)\ge 0$

2° $P(S)=1$

3° 若$A_1,A_2,\dots,A_k,\dots$两两互不相容， 无限可加性

则$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

称$P(A)$为事件A的概率，以上为概率的三个公理。

21

1° $P(\varnothing)=0$

证：$\because S\cup\varnothing=S$，$S\cap\varnothing=\varnothing$，即$S$与$\varnothing$不相容

由公理2及3：$1=P(S\cup\varnothing)=P(S)+P(\varnothing)=1+P(\varnothing)$

$\Rightarrow P(\varnothing)=0$

注意：若$P(A)=0$不能推出 $A=\varnothing$；同理，若$P(B)=1$不能推出 $B=S$.

2° 设$A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\dots,n$,且$i\ne j$,则$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$ 有限可加性

证：令 $A_{n+k}=\varnothing(k=1,2,\dots)$,

总结

Cornell Notes

Title

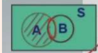
Date

重点

3° 设A、B为任意两事件，$P(A-B)=P(A)-P(AB)$，特别地，

当$A\supset B$时，则有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，且$P(A)\ge P(B)$，

于是有$P(A)\le P(S)=1$



证：$A=(A-B)\cup AB$且两者不相容，则 $P(A)=P(A-B)+P(AB)$

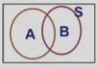
当$A\supset B$时，$P(AB)=P(B)\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$

并由 $P(A-B)\ge 0 \quad\Rightarrow\quad P(A)\ge P(B)$

$\because A\subset S,\quad \therefore P(A)\le P(S)=1$

4° $P(A)=1-P(\bar{A})$ → $P(\bar{A})=1-P(A)$

5° 概率的加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$



证：$\because A\cup B=A\cup(B-A) \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

推广1：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

证：$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup B)+P(C)-P(AC\cup BC)$

$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

推广2（一般情形）：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

24

二、概率的乘法公式

回顾 ① $\begin{cases}P(A-B)\\P(A\cup B)\end{cases}$

② 古典概型：抽签问题

对条件概率公式变换一下就可得到下面的乘法公式（假设条件概率都有意义）：

③ 条件概率 · $P(B|A)=P(AB)/P(A)$ $\neq 0$

$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$ 或 $P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)$

$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$

注意：

$P(ABC)=P(AB)P(C|AB)$

$=P(A)P(B|A)P(C|AB)$

$P(ABC)=P(A)P(BC|A)$

$=P(A)P(B|A)P(C|B|A)$

$=P(A)P(B|A)P(C|AB)$

59

总结

Cornell Notes

Title

Date

重点

贝叶斯

相互独立

内容

样本空间，样本点

随机试验：可重复、结果范围可确定但结果未知.

$A\cap B = AB = A\cdot B$　　互斥、对立

$A-B = A\overline{B}$

$\overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j} = \bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}$　　$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$

$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

古典概型（等可能）　抽奖

$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(AB_j)$　划分、完备事件组

$P(B_k|A) = \dfrac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}$

$P(B|A) = P(B)$

A, B 相互独立时，A、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{B}$ 均相互独立

总结

Cornell Notes

Title

Date

重点

内容

离散型随机变量

0-1分布(两点分布) $X \sim 0\text{-}1(p)$

$E=np$

$D=np(1-p)$

二项分布 $X \sim B(n,p)$ $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$E(X)=\lambda$

$D(X)=\lambda$

泊松分布 $X \sim P(\lambda)$ $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

A品类个数

抽取k个数 总个数

超几何 $X \sim H(n,a,N)$ $P(X=k)=\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_N^n}$

直至A发生

几何 $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$

直至A发生r次

帕斯卡 $P(X=k)=C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, k=r,r+1 \dots$

概率分布函数

$F(x)=P(X \leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$f(x)$ 称为概率密度函数

均匀分布

用 $\frac{x-\mu}{\sigma}$ 替换，可查表

正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

X 正态变量 μ 位置参数 σ 尺度参数

均值 $\frac{1}{\lambda}$

指数分布 $f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ $X \sim E(\lambda)$

Γ 分布 $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$ $f(x)=\begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x>0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

二参数威布尔分布 $f(x)=\begin{cases} \frac{r}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{r-1} e^{-(x/\alpha)^r}, & x>0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

β 分布 $X \sim \beta(a,b)$ $f(x)=\begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

总结

Cornell Notes

Title

Date

重点

内容

联合概率分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$ ...

边际/边缘分布律 $P\{Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij}$

条件分布律 $P\{Y=y_i \mid X=x_i\}=\dfrac{P\{X=x_i, Y=y_i\}}{P\{X=x_i\}}$

联合分布函数 $F(x,y)=P\{x\leq X, y\leq Y\}$

边际概率分布函数 $F_X(x)=P\{x\leq X\}=F(x,+\infty)$

条件概率分布函数 $F_{Y|X}(y|x_i)=P\{Y\leq y \mid X=x_i\}$ 离散型

常记为 $P\{Y=y \mid X=x\}$

$=\lim\limits_{\delta\to 0^+} P\{Y\leq y \mid x<X\leq x+\delta\}$ 连续型

$=\lim\limits_{\delta\to 0^+} P\{Y\leq y \mid x-\delta<X\leq x+\delta\}$ 一般性

二维连续型随机变量 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$

$f(x,y)$ 联合概率密度函数.

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=f(x,y)$$

$$P\{(x,y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

边际概率密度函数 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$, $-\infty<y<+\infty$

均匀分布 $f(x,y)=\dfrac{1}{S_D}$ $(x,y)\in D$

二元正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^{\ 2}}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^{\ 2}}\right]\right\}$$

总结

Cornell Notes

Title

Date

重点

内容

随机变量的独立性：

$$P\{X\in D_1, Y\in D_2\} = P\{X\in D_1\}\cdot P\{Y\in D_2\}$$

$$f(x,y) = m(x)\cdot n(y)$$

对于 $Z=X+Y$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\, dx$$

期望

令 $P\{X=x_i\}=p_i$

则 $E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx < +\infty$

$\sum p_i |x_i| < +\infty$

$$E(c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i)$$

$$E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)\, dy$$

$$E(Y) = E[E(Y|X)]$$

方差

$E[(X-E(X))^2] = Var(X)$ 标准差 $\sqrt{Var(X)} = \sigma(X)$ 或 $SD(X)$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$Var(cX+b) = c^2 Var(X)$ $Var(X) \le E[(X-c)^2]$

$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$ 相互独立

标准化变量

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$$

变异系数 $C_v = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$

总结

Cornell Notes

Title

Date

重点

内容

协方差

$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ 独立 $\Rightarrow cov=0$

$\Uparrow$

不相关,可能不独立(可能有其他)无线性关系

$=E(XY)-E(X)E(Y)$

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$

$Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}Cov(X_i,X_j)$

$Cov(X,X)=Var(X)$ $\quad Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

$Var(X)\cdot Var(Y)\neq 0$ 时, $(Cov(X,Y))^2\le Var(X)Var(Y)$

当X,Y有严格线性关系时取等

相关系数

$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$ 前提 $E(X^2)$, $E(Y^2)$ 存在

$Var(X)$、$Var(Y)\neq 0$

$=Cov(X^*,Y^*)\le 1$ (X,Y严格线性,取等)

独立 $\Rightarrow \rho=0$ $\quad (X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}},\ Y^*=\dfrac{Y-E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}})$

概率收敛

$\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|Y_n-c|<\varepsilon\}=1$ 则称 $Y_n\xrightarrow{P}c$

马尔可夫

若 $E(|Y|^k)$ 存在,则对任意 $\varepsilon>0$:

$$P\{|Y|\ge\varepsilon\}\le\frac{E(|Y|^k)}{\varepsilon^k}$$

切比雪夫

$$P\{|X-\mu|\ge\varepsilon\}\le\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$ (μ 期望, σ^2 方差)

总结

Cornell Notes

Title

Date

重点

内容

大数定律

$\{X_i, i\geq 1\}$ 为一随机变量序列，

若存在常数序列 $\{C_n, n\geq 1\}$ 使任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - C_n\right|<\varepsilon\right\}=1$$

则称 $\{X_i, i\geq 1\}$ 服从(弱)大数定律

令 $C_n = C$.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} C,\quad n\to+\infty$$

伯努利定律

有 n 重伯努利实验，n_A 为 A 发生次数，p 为 A 发生概率，则

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

辛钦大数定律

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$ μ 数学期望

林德伯格－莱维中心极限定理

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}}\leq x\right\}$$

X_i，独立同分布随机变量数列

标准化

$$=\lim_{n\to+\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leq x\right\}$$

n 足够大时，左式 $\sim N(0,1)$

总结

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

Cornell Notes

Title

Date

重点

棣莫弗-拉普拉斯

内容

即 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ $n\to\infty$ 时，近似服从标准正态分布 $N(0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{n_A - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$n\to\infty$ $B(n,p) \sim N(np, np(1-p))$

总结

Cornell Notes

Title 6 | Date

重点 | 内容

总体容量(有限/无限容量)　样本容量

简单随机抽样　有放回/足够多

独立，分布函数相同

统计量：$g(X_1,X_2\ldots X_n)$ 不含未知参数

样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$　☆ 无偏估计

k阶距：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,\ k=1,2\ldots$

k阶中心距：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k,\ k=2,3\ldots$

χ^2 分布

$X_n\sim N(0,1)$　$Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$

称 $Y\sim\chi^2(n)$ 自由度为n的χ^2分布

$$f_{\chi^2}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$Y_i\sim\chi^2(n_i)\Rightarrow Y_1+Y_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$

$E(Y)=n,\ Var(Y)=2n$

上α分位数　$P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty}f_{\chi^2}(x)dx=\alpha$

t 分布

$X\sim N(0,1),\ Y\sim\chi^2(n)$　$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 则 $t\sim t(n)$

$$f_t(x)=\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$n\to\infty$，$f_t(x)$趋于标准正态密度函数

总结

$X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$　$f(x)=\begin{cases}\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

Cornell Notes

Title

Date

重点

F分布

内容

上α分位数

t分布分位数 $P\{t>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty}f_t(x)dx=\alpha$

$U\sim\chi^2(n_1)$, $V\sim\chi^2(n_2)$ $F=\frac{U/n_1}{V/n_2}$ 则称

F为服从第一自由度为n_1,第二自由度为n_2的F分布

$F\sim(n_1,n_2)$.

$$f_F(x)=\frac{\Gamma[(n_1+n_2)/2](n_1/n_2)^{n_1/2}x^{n_1/2-1}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)[1+(n_1x/n_2)]^{(n_1+n_2)/2}},\ x>0$$

$F\sim F(n_1,n_2)$ $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

$X\sim t(n)$ $X^2\sim F(1,n)$

$$P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty}f_F(x)dx=\alpha,\ 0<\alpha<1$$

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$

$X_1,X_2\dots X_n$为来自$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本

$$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$\bar{X}$与S^2相互独立

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

$X_1,X_2\dots X_n$为来自$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的简单随机样本

$Y_1,Y_2\dots Y_n$为来自$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的简单随机样本

总结

(1) $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时, $\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2},\quad S_w=\sqrt{S_w^2}$$

Cornell Notes

Title 7　　Date

重点

点估计

估计量评价准则

内容

矩法 用期望和方差等表示出未知量
再用样本值的期望 A_1 和方差 B_2 替换

极大似然法 得到样本的概率取极值时的值
(一般求导，或先求对数再导)

无偏性准则 $E(\hat{\theta})=\theta$ 则无偏
若 $\neq$ 则称 $E(\hat{\theta})-\theta$ 为偏差
若 $\neq$ 但 $\lim\limits_{n\to+\infty}E(\hat{\theta})=\theta$ 渐近无偏估计

有效性准则 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2\dots X_n)$ $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2\dots X_n)$
均为无偏估计
若 $Var(\hat{\theta}_1)\leq Var(\hat{\theta}_2)$ 则 $\hat{\theta}_1$ 更有效

均方误差准则 $Mse(\hat{\theta})=E[(\hat{\theta}-\theta)^2]$ 越小越优

*** 相合性准则** $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|<\varepsilon\}=1$
$\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计量 $\hat{\theta}_n\xrightarrow{P}\theta,\ n\to+\infty$

置信区间 $P\{\underset{\text{置信下限}}{\hat{\theta}_L}<\theta<\underset{\text{置信上限}}{\hat{\theta}_U}\}\geq\underset{\text{置信水平}}{1-\alpha}$ $E(\hat{\theta}_L-\hat{\theta}_U)$ 精确度 → 主为误差限
单侧置信下限 $P\{\hat{\theta}_L<\theta\}\geq1-\alpha$

求法

枢轴量法 构造分布已知的枢轴量 $G(X_1,X_2\dots X_n;\theta)$
取 a,b 令 $P\{a<G(X_1,X_2\dots X_n;\theta)<b\}\geq1-\alpha$ 尽可能 =
分离 θ 和 G，则转化为 $P\{\hat{\theta}_L<\theta<\hat{\theta}_U\}\geq1-\alpha$

总结

Cornell Notes

Title

Date

重点

内容

	待估参数	其他参数	枢轴量的分布	置信区间	单侧置信限
单个正态总体	μ	σ^2 已知	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\widehat{\mu}_U=\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$ $\widehat{\mu}_L=\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$
	μ	σ^2 未知	$t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\widehat{\mu}_U=\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$ $\widehat{\mu}_L=\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$
	σ^2	μ 未知	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$	$\widehat{\sigma}^2_U=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ $\widehat{\sigma}^2_L=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2 和 σ_2^2 已知	$Z=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$(\widehat{\mu_1-\mu_2})_U=\overline{X}-\overline{Y}+z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $(\widehat{\mu_1-\mu_2})_L=\overline{X}-\overline{Y}-z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$t=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ 其中 $S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$	$(\widehat{\mu_1-\mu_2})_U=\overline{X}-\overline{Y}+t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$ $(\widehat{\mu_1-\mu_2})_L=\overline{X}-\overline{Y}-t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$
	[illegible]	[illegible]	$t=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$ [illegible] $\begin{cases}\sim N(0,1), & n_1,n_2>50,\\ \sim t(k), & k=\min(n_1-1,n_2-1)\end{cases}$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm q_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)$ 其中 $q_p=\begin{cases}[illegible] & [illegible]\\ t_p(k), & 用\ t\sim t(k)\ 近似\end{cases}$	$(\widehat{\mu_1-\mu_2})_U=\overline{X}-\overline{Y}+q_\alpha\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$ $(\widehat{\mu_1-\mu_2})_L=\overline{X}-\overline{Y}-q_\alpha\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$
	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\left(\widehat{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\right)_U=\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$ $\left(\widehat{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\right)_L=\frac{S_1^2/S_2^2}{F_\alpha(n_1-1,n_2-1)}$

总结

Cornell Notes

Title

Date

重点	内容
假设检验	想得到证实 H_0 原假设/零假设　H_1 备择假设/对立假设
	$H_0: \theta \geq \theta_0 / \theta = \theta_0$　$H_1: \theta < \theta_0$　(单侧) 左侧检验
	$H_0: \theta \leq \theta_0 / \theta = \theta_0$　$H_1: \theta > \theta_0$　右侧检验
	$H_0: \theta = \theta_0$　$H_1: \theta \neq \theta_0$　双侧检验
	检验统计量 (与 H_0 成立与否联系密切)
	拒绝域 W　接受域 $\overline{W}$
两类错误	一类：弃真错误　$\alpha = P$(拒绝 H_0 | H_0 真)
	二类：存伪错误　$\beta = P$(接受 H_0 | H_0 假)
奈曼-皮尔逊原则	先控制 $\alpha < \alpha_0$，再使 β 尽量小.
	显著性水平：α
P-值	越小，拒绝 H_0 的理由越充分
	H_0 真，观察到的结果在一次实验中发生的可能性
	$P < \alpha \longrightarrow$ 统计显著

总结

Cornell Notes

Title

Date

重点

关于μ的
假设检验

内容

1、σ^2已知

双侧

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$|z|\geq z_{\alpha/2}$，拒绝原假设

有$100(1-\alpha)\%$的把握认为$\mu\neq\mu_0$

P-值$=P_{H_0}\{|Z|\geq|z_0|\}=2P_{H_0}\{Z\geq|z_0|\}=2(1-\Phi(|z_0|))$

P-值$\leq$给定α，拒绝原假设

2、σ^2未知

双侧

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

拒绝域 $W\ \{|T|=\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\}$

P-值$=P\{T\leq t_0\}=P\{t(n-1)\leq t_0\}$

3、σ^2相关

取$\sigma^2=\sigma_0^2$，$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$W=\{\chi^2\geq\underset{\text{左侧}}{\chi^2_{\alpha/2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\leq\underset{\text{右侧}}{\chi^2_{1-\alpha/2}}(n-1)\}$

$p_0=P_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leq\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\right\}=P\{\chi^2(n-1)\leq\chi_0^2\}$

P-值$=2\min\{p_0,1-p_0\}$ 双侧

总结

$=p_0$ 左侧

$=1-p_0$ 右侧

Cornell Notes

Title

Date

重点

双正态

检验方差是否相等

内容

双侧假设：

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

1、σ_1^2, σ_2^2 已知

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$W = \{|Z| \geq Z_{\alpha/2}\}$$

$$P\text{值} = P_{H_0}\{|Z| \geq |Z_0|\} = 2(1-\Phi(|Z_0|))$$

2、$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 未知

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}}} \quad S_W^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$W = \{|T| \geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}$$

$$P\text{-值} = P_{H_0}\{|T| \geq |t_0|\}$$

$$= 2P\{t(n_1+n_2-2) \geq |t_0|\}$$

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

H_0 成立，$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

$$W = \{F \geq F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) \text{ 或 } F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\}$$

总结

$$p_0 = P_{\sigma_1^2=\sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2}\right\} = P\{F(n_1-1, n_2-1) \leq f_0\}$$

检验统计值

$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

$$P\text{-值} = 2\min\{p_0, 1-p_0\}$$

Cornell Notes

Title

Date

重点

内容

总结

Cornell Notes

Title

Date

重点

内容

总结