

材料力学补天

材力公式自测

材力弯矩图画在受弯侧

1. 工程力学是理论力学静力学内容+材料力学上册的内容。找资源的时候直接b站搜索材料力学就可以搜到很多相关资源。唯一需要注意的是很多资源都是土木的，土木的弯矩图和机械的弯矩图是反过来的。

平面图形的几何性质

1. 静矩

- 单位：长度的三次方(m^3)

$$S_z = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A z dA \quad (I.1)$$

分别定义为图形对 z 轴和 y 轴的静矩，也称为图形对 z 轴和 y 轴的一次矩。

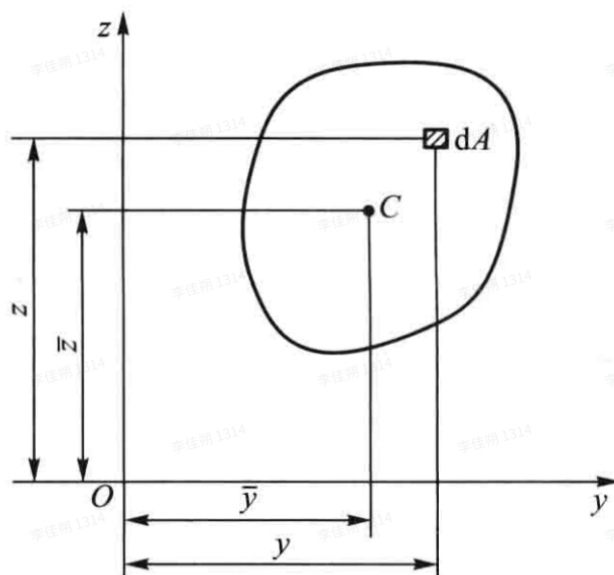


图 I.1

2. 形心

$$\bar{y} = \frac{\int_A y dA}{A}, \quad \bar{z} = \frac{\int_A z dA}{A} \quad (\text{I.2})$$

这也就是确定平面图形的形心坐标的公式。

3. 静距与形心关系

$$\bar{y} = \frac{S_z}{A}, \quad \bar{z} = \frac{S_y}{A} \quad (\text{I.3})$$

所以,把平面图形对 z 轴和 y 轴的静矩,除以图形的面积 A ,就得到图形形心的坐标 $\bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 。把上式改写为

$$S_z = A \cdot \bar{y}, \quad S_y = A \cdot \bar{z} \quad (\text{I.4})$$

这表明,平面图形对 y 轴和 z 轴的静矩,分别等于图形面积 A 乘形心的坐标 $\bar{z}$ 和 $\bar{y}$ 。

由以上两式看出,若 $S_z = 0$ 和 $S_y = 0$,则 $\bar{y} = 0$ 和 $\bar{z} = 0$ 。可见,若图形对某一轴的静矩等于零,则该轴必然通过图形的形心;反之,若某一轴通过形心,则图形对该轴的静矩必等于零。

4. 组合图形的静距与形心

当一个平面图形是由若干个简单图形(例如矩形、圆形、三角形等)组成时,由静矩的定义可知,图形各组成部分对某一轴的静矩的代数和,等于整个图形对同一轴的静矩,即

$$S_z = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^n A_i \bar{z}_i \quad (\text{I.5})$$

式中, A_i 和 $\bar{y}_i, \bar{z}_i$ 分别表示任一组成部分的面积及其形心的坐标。 n 表示图形由 n 个部分组成。由于图形的任一组成部分都是简单图形,其面积及形心坐标都不难确定,所以公式(I.5)中的任一项都可由公式(I.4)算出,其代数和即为整个组合图形的静矩。

若将公式(I.5)中的 S_z 和 S_y 代入公式(I.3),便得组合图形形心坐标的计算公式为

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (\text{I.6})$$



也可以是若干图形相减

例 1.3 某单臂液压机机架的横截面尺寸如图 1.4 所示。试确定截面形心的位置。

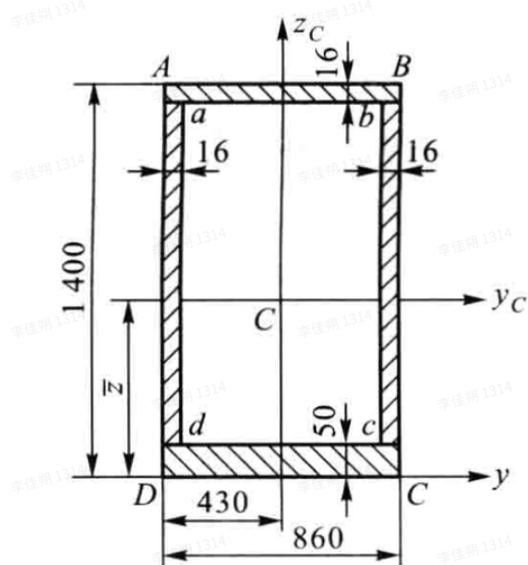


图 1.4

解：截面有一垂直对称轴，其形心必然在这一对称轴上，因而只需确定形心在对称轴上的位置。把截面看成是由矩形 $ABCD$ 减去矩形 $abcd$ ，并设 $ABCD$ 的面积为 A_1 ， $abcd$ 的面积为 A_2 。以底边 DC 作为参考坐标轴 y 。

$$A_1 = 1.4 \text{ m} \times 0.86 \text{ m} = 1.204 \text{ m}^2$$

$$\bar{z}_1 = \frac{1.4 \text{ m}}{2} = 0.7 \text{ m}$$

$$A_2 = (0.86 - 2 \times 0.016) \text{ m} \times (1.4 - 0.05 - 0.016) \text{ m} = 1.105 \text{ m}^2$$

$$\bar{z}_2 = \frac{1}{2} (1.4 - 0.05 - 0.016) \text{ m} + 0.05 \text{ m} = 0.717 \text{ m}$$

$$\bar{z} = \frac{A_1 \bar{z}_1 - A_2 \bar{z}_2}{A_1 - A_2} = 0.51 \text{ m}$$

5. 惯性矩

- 单位：长度的四次方 (m^4)

任意平面图形如图 I.5 所示,其面积为 A 。 y 轴和 z 轴为图形所在平面内的坐标轴。在坐标 (y,z) 处取微面积 dA ,遍及整个图形面积 A 的积分

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad (\text{I.7})$$

分别定义为图形对 y 轴和 z 轴的惯性矩,也称为图形对 y 轴和 z 轴的二次矩。在公式(I.7)中,由于 z^2 和 y^2 总是正的,所以 I_y 和 I_z 也恒为正值。惯性矩的量纲是长度的四次方。

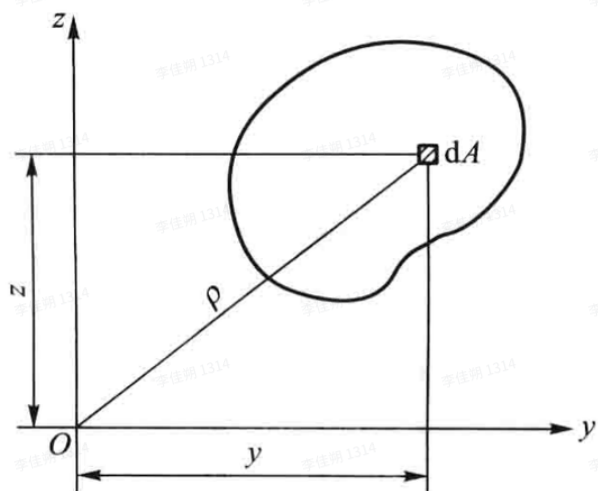


图 I.5

6. 惯性半径

- 单位: 长度(m)

力学计算中,有时把惯性矩写成图形面积 A 与某一长度的平方的乘积,即

$$I_y = A \cdot i_y^2, \quad I_z = A \cdot i_z^2 \quad (\text{I.8})$$

或者改写为

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad (\text{I.9})$$

式中 i_y 和 i_z 分别称为图形对 y 轴和对 z 轴的惯性半径。惯性半径的量纲就是长度的量纲。

7. 极惯性矩

以 ρ 表示微面积 dA 到坐标原点 O 的距离, 下列积分

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (\text{I.10})$$

定义为图形对坐标原点 O 的极惯性矩。由图 I.5 可以看出, $\rho^2 = y^2 + z^2$, 于是有

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA \\ &= I_z + I_y \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

所以, 图形对任意一对互相垂直的轴的惯性矩之和, 等于它对该两轴交点(坐标原点)的极惯性矩。

8. 组合图形的惯性矩

当一个平面图形是由若干个简单的图形组成时, 根据惯性矩的定义, 可先算出每一个简单图形对同一轴的惯性矩, 然后求其总和, 即等于整个图形对于这一轴的惯性矩。这可用下式表达为

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{yi}, \quad I_z = \sum_{i=1}^n I_{zi} \quad (\text{I.12})$$

例如可以把图 I.9 所示空心圆, 看作是由直径为 D 的实心圆减去直径为 d 的实心圆, 由公式(I.12), 并使用例 I.5 所得结果, 即可求得

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

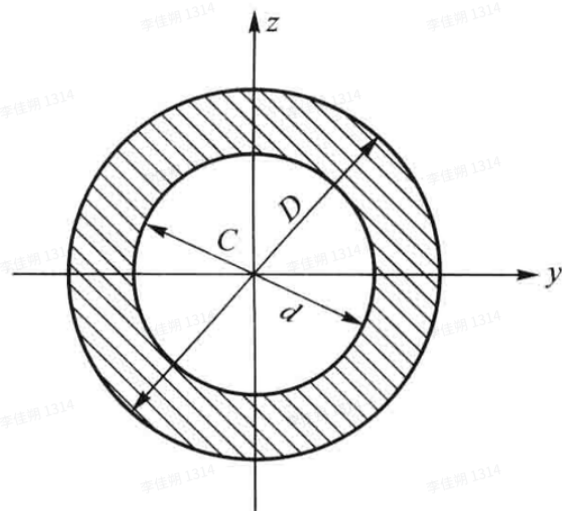


图 I.9

9. 惯性积

在平面图形的坐标 (y, z) 处,取微面积 dA (图 I.5),遍及整个图形面积 A 的积分

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad (\text{I.13})$$

定义为图形对 y, z 轴的惯性积。

由于坐标乘积 yz 可能为正或负,因此, I_{yz} 的数值可能为正,可能为负,也可能等于零。例如当整个图形都在第一象限内时(如图 I.5),由于所有微面积 dA 的 y, z 坐标均为正值,所以图形对这两个坐标轴的惯性积也必为正值。又如当整个图形都在第二象限内时,由于所有微面积 dA 的 z 坐标为正,而 y 坐标为负,因而图形对这两个坐标轴的惯性积必为负值。惯性积的量纲是长度的四次方。



若坐标轴有一个轴是对称轴,则图形对这一坐标系的惯性积为零。

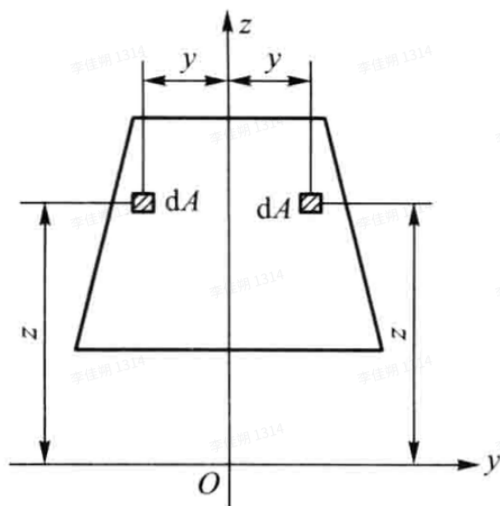


图 I.10

若坐标轴 y 或 z 中有一根是图形的对称轴,例如图 I.10 中的 z 轴。这时,如在 z 轴两侧的对称位置处,各取一微面积 dA ,显然,两者的 z 坐标相同, y 坐标则数值相等但符号相反。因而两个微面积与坐标 y, z 的乘积,数值相等而符号相反,它们在积分中相互抵消。所有微面积与坐标的乘积都两两抵消,最后使得

$$I_{yz} = \int_A yz dA = 0$$

所以,坐标系的两根坐标轴中只要有一根为图形的对称轴,则图形对这一坐标系的惯性积就等于零。

10. 主惯性轴、主惯性矩、形心主惯性轴、形心主惯性矩、形心主惯性平面

(1)主惯性轴 当平面图形对某一对正交坐标轴 y_0 、 z_0 的惯性积 $I_{y_0z_0}=0$ 时，则坐标轴 y_0 、 z_0 称为主惯性轴。

因此，具有一个或两个对称轴的正交坐标轴一定是平面图形的主惯性轴。

(2)主惯性矩 平面图形对任一主惯性轴的惯性矩称为主惯性矩。

(3)形心主惯性轴 过形心的主惯性轴称为形心主惯性轴。

可以证明：任意平面图形必定存在一对相互垂直的形心主惯性轴。

(4)形心主惯性矩 平面图形对任一形心主惯性轴的惯性矩称为形心主惯性矩。

通过图形形心 C 的主惯性轴称为形心主惯性轴, 图形对该轴的惯性矩就称为形心主惯性矩。如果这里所说的平面图形是杆件的横截面, 则截面的形心主惯性轴与杆件轴线所确定的平面, 称为形心主惯性平面。杆件横截面的形心主惯性轴、形心主惯性矩和杆件的形心主惯性平面, 在杆件的弯曲理论中有重要意义。截面对称于对称轴的惯性积等于零, 截面形心又必然在对称轴上, 所以截面的对称轴就是形心主惯性轴, 它与杆件轴线确定的纵向对称面就是形心主惯性平面。

11. 平行移轴公式



注意 a 和 b 是有正负的

$$\left. \begin{aligned} I_y &= I_{y_c} + a^2 A \\ I_z &= I_{z_c} + b^2 A \\ I_{yz} &= I_{y_c z_c} + abA \end{aligned} \right\} \quad (I.14)$$

公式 (I.14) 即为惯性矩和惯性积的平行移轴公式。使用时要注意, a 和 b 是图形的形心在 Oyz 坐标系中的坐标, 所以它们是有正负的。

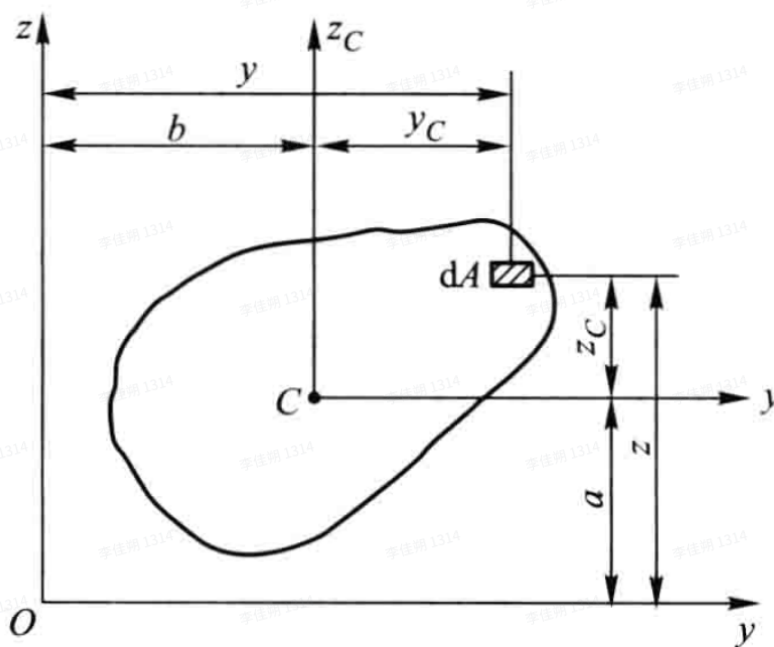


图 I.11

12. 转轴公式

$$\begin{cases} I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \end{cases}$$

13. 主惯性矩公式

$$I_{y_0 z_0} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{yz} \cos 2\alpha_0 = 0$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

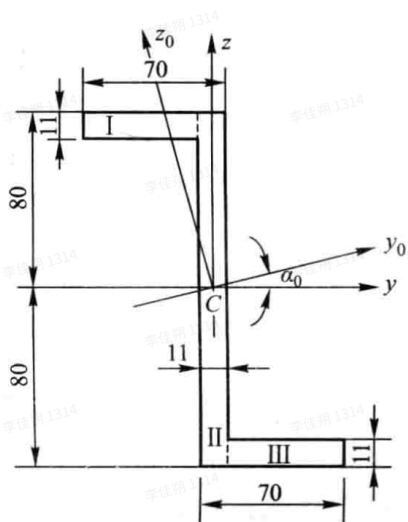


图 I .15

$$\begin{cases} I_{y_0} = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \\ I_{z_0} = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \end{cases}$$

或简写成:

$$\begin{matrix} I_{y_0} \\ I_{z_0} \end{matrix} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

α_0 是过形心坐标轴逆时针旋转的角度

14. 求形心主惯性轴的位置及形心主惯性矩大小

求形心主惯性轴的位置及形心主惯性矩大小的步骤：

1) 找出形心位置；

2) 通过形心c建立参考坐标 yoz ，

求出 I_y, I_z, I_{yz} 。

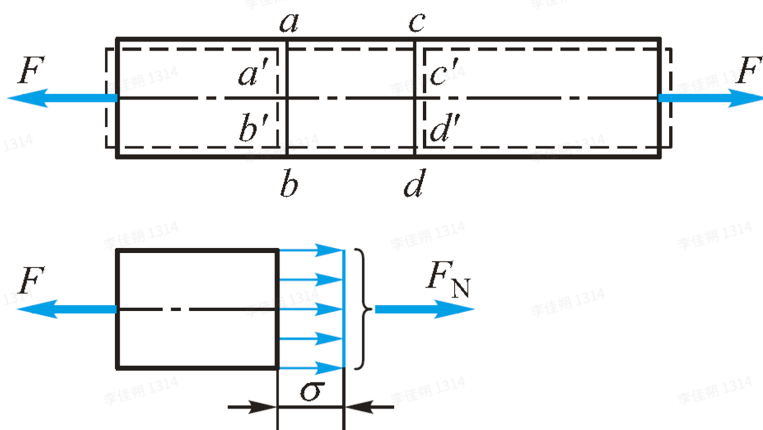
3) 求 $\alpha_0, I_{y_0}, I_{z_0}$

15. 目一道例题速通

拉压问题

1. 横截面轴向应力

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

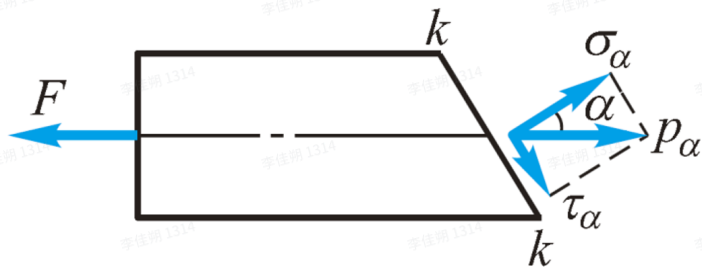
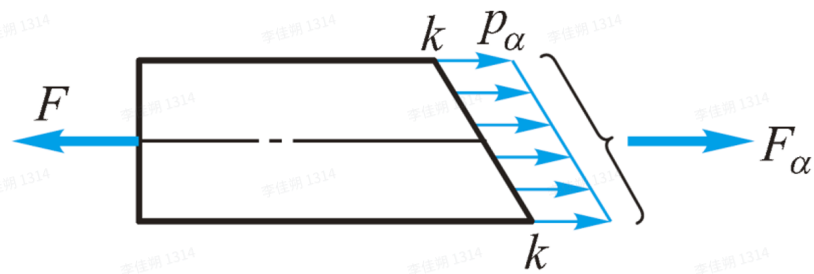


2. 斜截面应力

1. 正应力 $\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha$

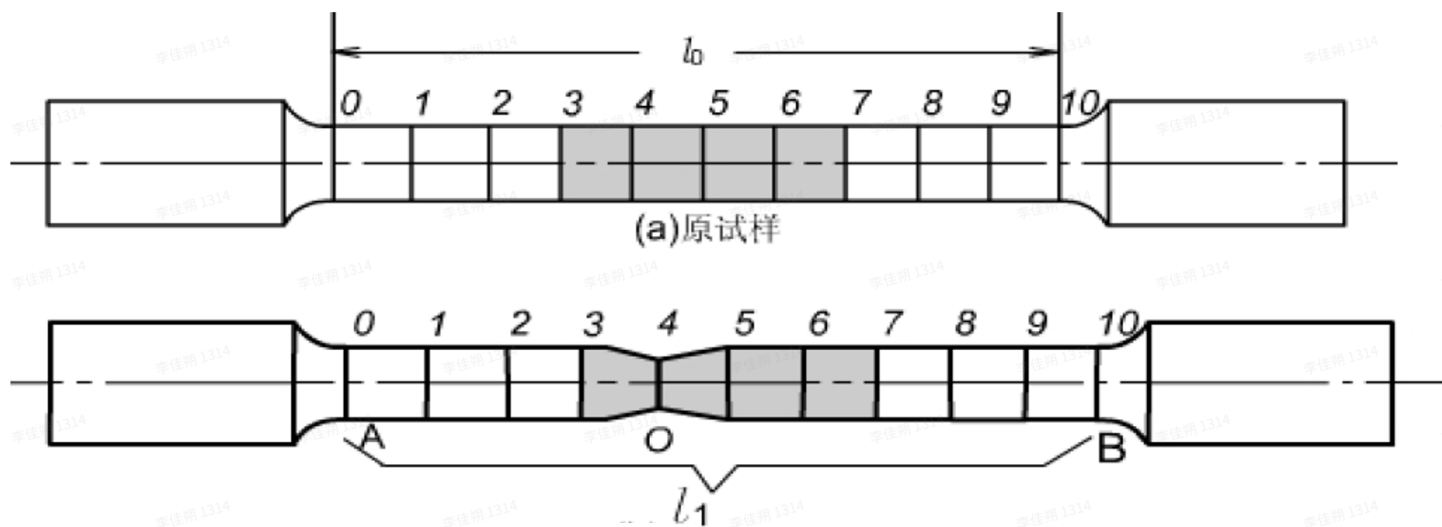
2. 切应力 $\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$

• 其中 α 是轴向力逆时针转向法线的角度， $\sigma = \frac{F}{A}$ 其中 A 为横截面面积



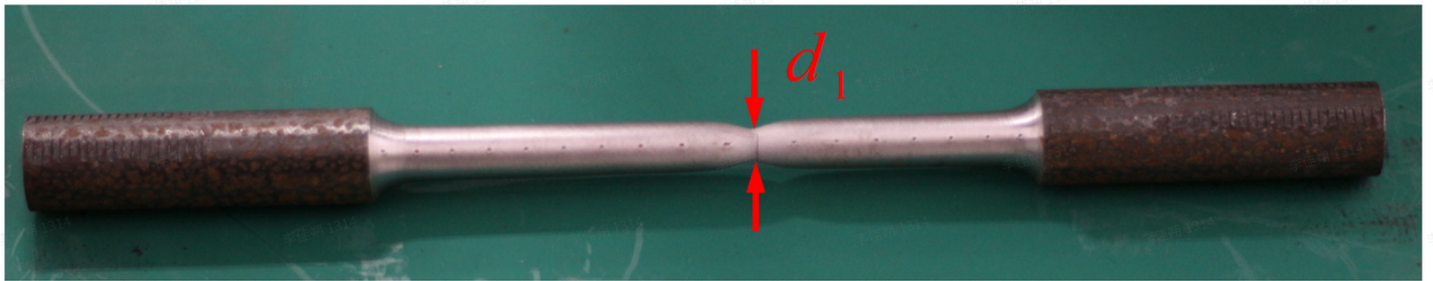
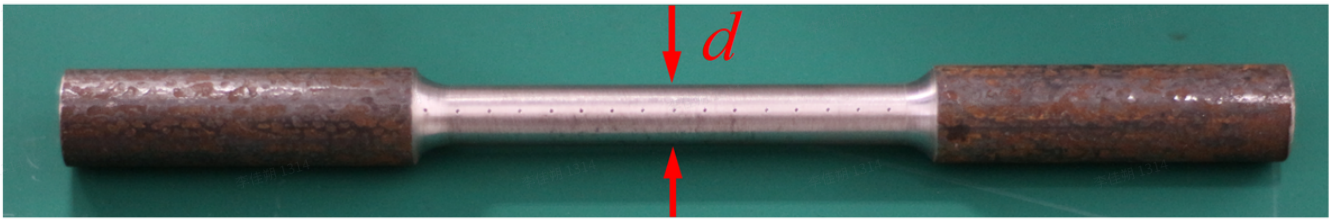
3. 断后伸长率

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \times 100\%$$



4. 截面收缩率

$$\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \times 100\%$$



5. 塑性材料与脆性材料

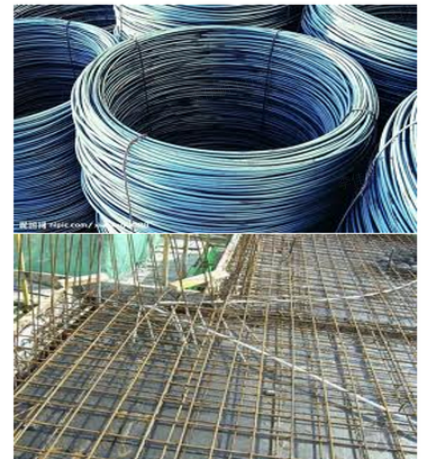
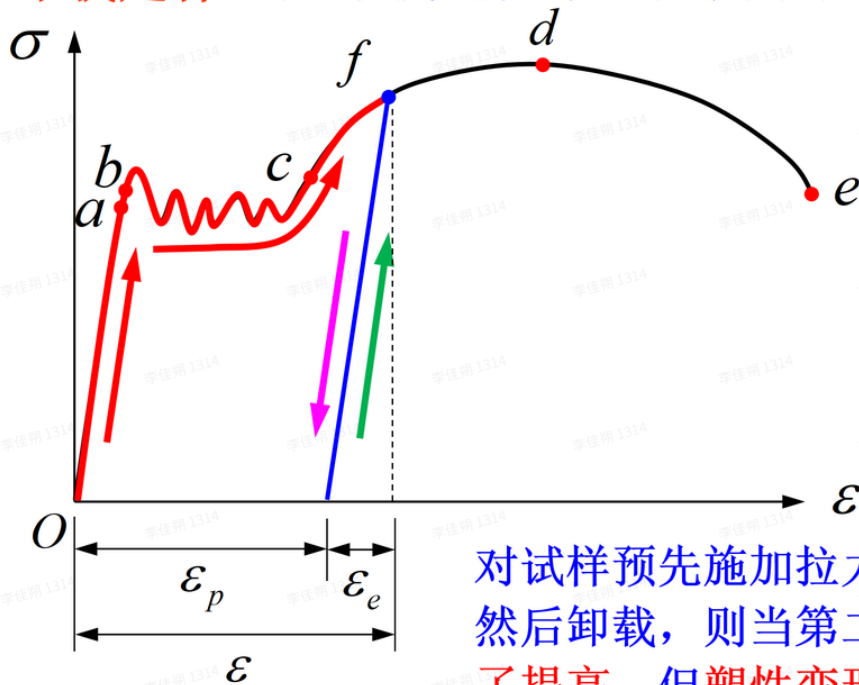
δ 和 ψ 是衡量材料塑性的两个重要指标

δ 和 ψ 数值较高的材料，通常称为塑性材料。

通常称 $\delta < 5\%$ 的材料为脆性材料。

6. 卸载定律与冷作硬化

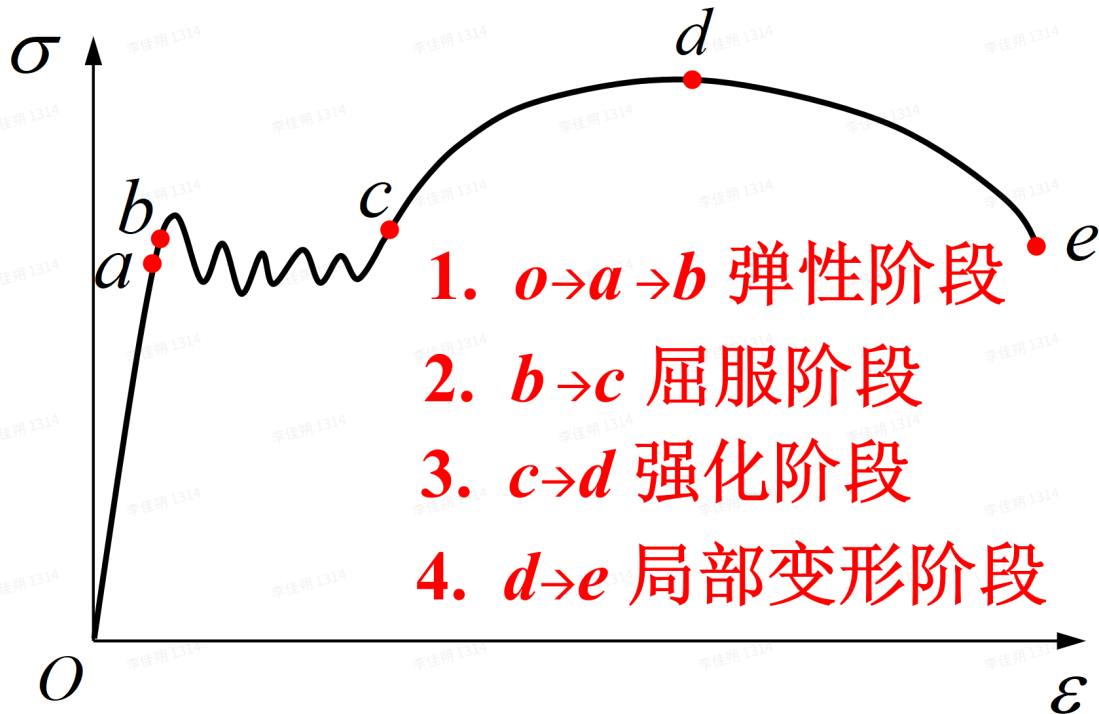
卸载定律：在卸载过程中，应力和应变按直线规律变化！



对试样预先施加拉力，使之达到强化阶段的 f 点，然后卸载，则当第二次加载时，其比例极限得到了提高，但塑性变形和断后伸长率却有所降低，这一现象称为冷作硬化。

7. 应力应变曲线

1. 低碳钢应力应变曲线

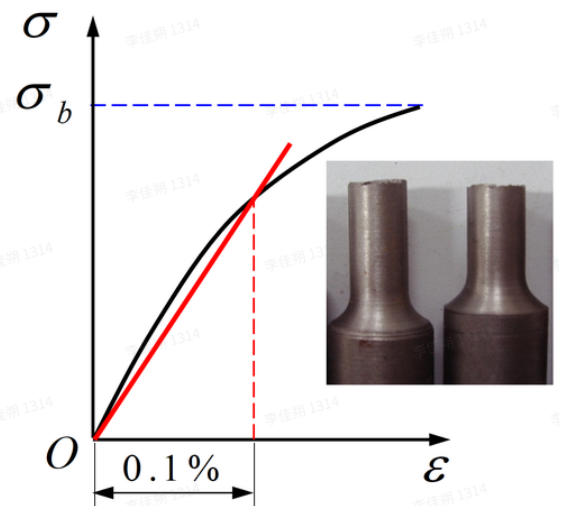


2. 铸铁拉伸应力应变曲线

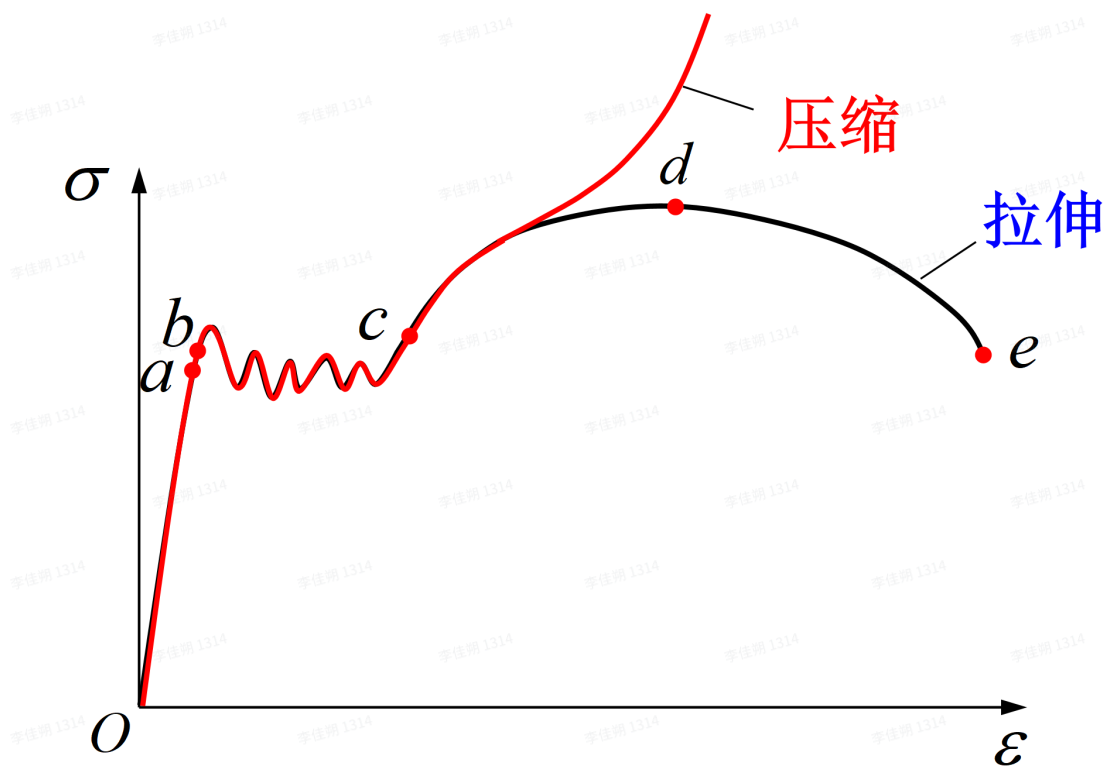
σ - ε 曲线的特征

1. 没有屈服现象和颈缩现象
2. 没有明显的直线部分
3. 只能测出其抗拉强度
4. 拉断前的应变很小，断后伸长率也很小

在工程中，铸铁的拉应力不能很高，在较低的拉应力下，可近似地认为服从**胡克定律**。

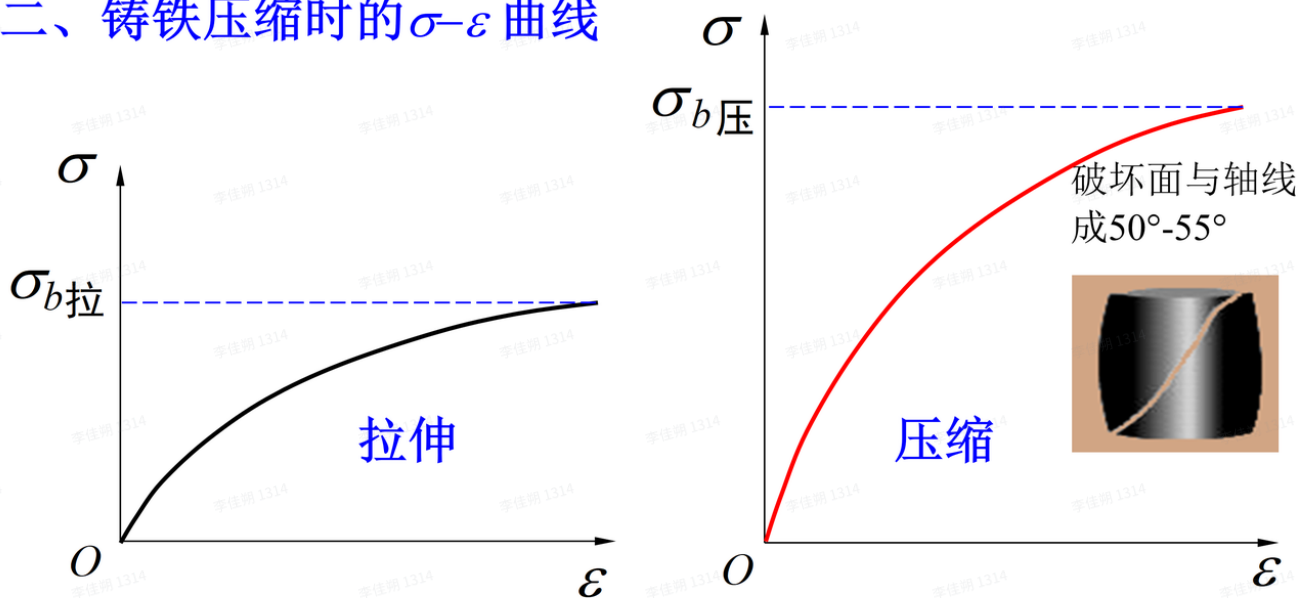


3. 低碳钢压缩应力应变曲线



4. 铸铁压缩应力应变曲线

二、铸铁压缩时的 σ - ϵ 曲线



铸铁的抗压强度比它的抗拉强度高4~5倍！

8. 许用应力与安全因数

强度计算中，用极限应力除以大于1 的因数，并将所得结果称为许用应力，用 $[\sigma]$ 表示。

对于塑性材料

$$[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$$

对于脆性材料

$$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$$

大于1 的因数 n_s 或 n_b 称为安全因数。

把许用应力 $[\sigma]$ 作为构件工作应力的最高限度，即要求工作应力 σ 不超过许用应力 $[\sigma]$ 。于是得构件轴向拉伸或压缩时的强度条件为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \leq [\sigma]$$

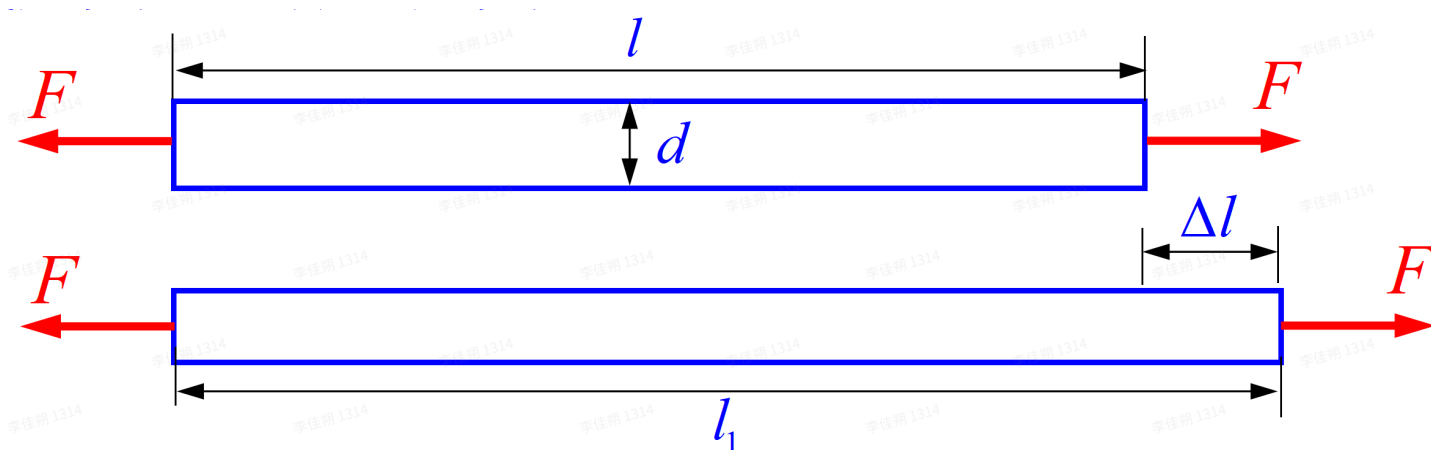
9. 轴向拉伸或压缩时的变形

1. 线应变(正应变)

1. 线应变 $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

2. 变形量 $\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$

- 条件：内应力小于比例极限
- 其中 E 是杨氏模量， EA 是杆件的抗拉(抗压)刚度



2. 单轴应力状态下的胡克定律

$$\sigma = E\varepsilon$$

- 条件：内应力小于比例极限

将式 $\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$ 改写为

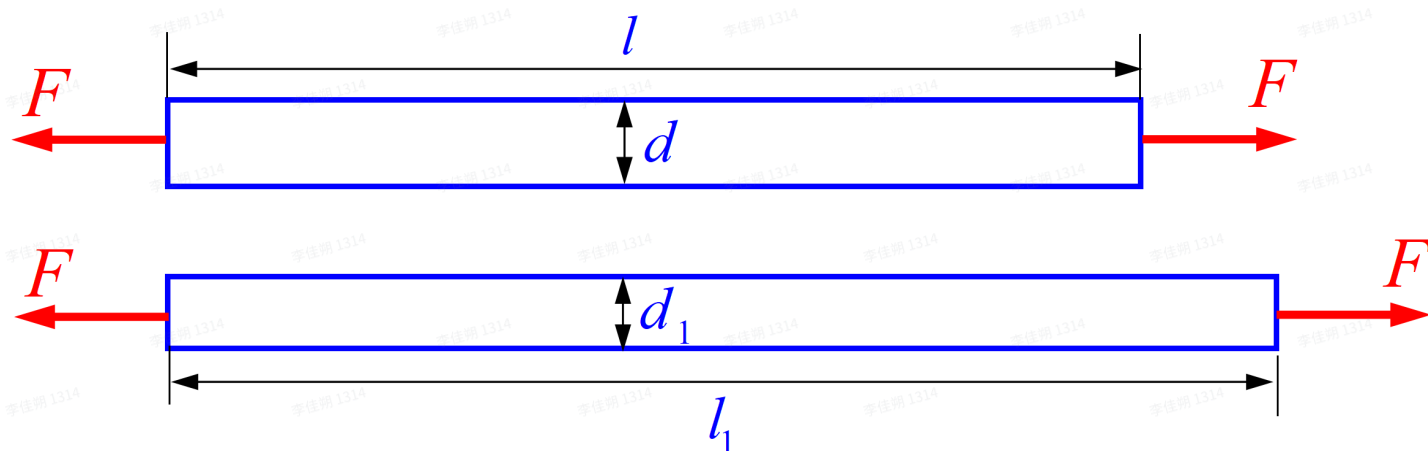
$$\overset{\varepsilon}{\left(\frac{\Delta l}{l} \right)} = \frac{1}{E} \overset{\sigma}{\left(\frac{F_N}{A} \right)}$$

单轴应力状态下的胡克定律
Hooke's law

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{或} \quad \sigma = E \varepsilon$$

3. 横向线应变

$$\varepsilon' = \frac{d_1 - d}{d}$$



杆件受拉，轴向线应变为正，而横向线应变为负；
杆件受压，轴向线应变为负，而横向线应变为正；
轴向线应变和横向线应变的正负号通常恰好相反。

4. 泊松比

$$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

μ 称为横向变形因数或
泊松比(Poisson's Ratio)。

5. 非均匀杆变形

对于各段伸长不均匀的杆：

$$\Delta l = \int \varepsilon(x) dx = \int \frac{F_N(x)}{E(x)A(x)} dx$$

6. 阶梯轴的变形

❖ 阶梯轴的变形

对于阶梯轴（横截面变化或者轴力变化），总的变形是每段阶梯轴变形的累加：

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \sum \frac{F_{Ni} l_i}{E_i A_i}$$

求解时必须保证每段轴的截面积和轴力都相同。这是一种近似的求解结果。实际上，在两段轴的交界处，应力在横截面上并不是均匀分布。

10. 轴向拉伸或压缩的应变能

$$V_\varepsilon = \frac{F^2 l}{2EA}$$

- 注：下图最下面的式子条件：内应力小于比例极限

$$W = \frac{F^2 l}{2EA}$$

功能原理

$$W = V_\varepsilon$$

$$V_\varepsilon = \frac{F^2 l}{2EA}$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

$$V_\varepsilon = \frac{EA}{2l} \Delta l^2$$

应变能的单位：焦耳，J （1J=1N·m）

11. 轴向拉伸或压缩的应变能密度

$$\nu_\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2E} \sigma^2 = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

- 后两个等式条件：内应力小于比例极限

应变能密度：单位体积内的应变能

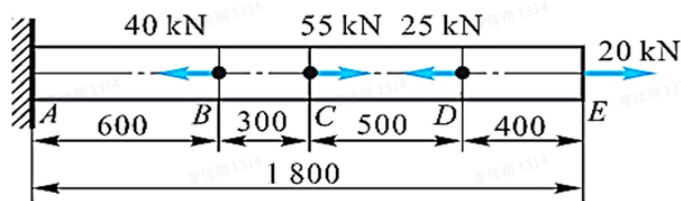
$$\nu_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{V} = \frac{\frac{1}{2} F \Delta l}{A l} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$\nu_\varepsilon = \frac{1}{2E} \sigma^2$$

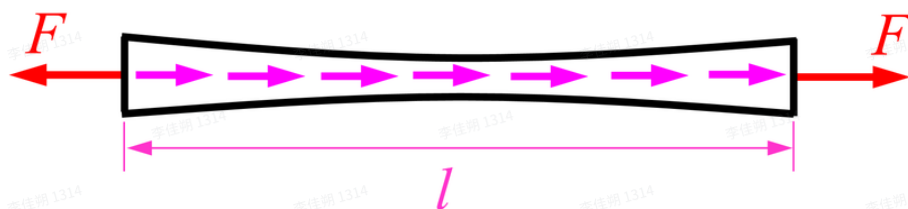
$$\nu_\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

12. 非均匀杆(或力)应变能



分段直杆（轴力不变）

$$V_{\varepsilon} = \sum_i \frac{F_{Ni}^2 l_i}{2E_i A_i}$$



$$F_N = F_N(x)$$

$$A = A(x)$$

$$E = E(x)$$

变截面且变轴力直杆

$$V_{\varepsilon} = \int_0^l \frac{F_N(x)^2}{2E(x)A(x)} dx$$

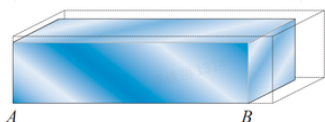
13. 超静定问题

14. 温度应力

$$1. \Delta l_T = \alpha \Delta T l$$

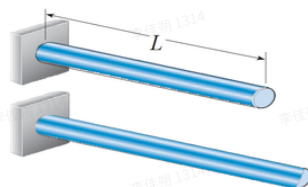
$$2. \varepsilon_T = \alpha \Delta T$$

物体由于温度变化会产生热胀冷缩，均匀材料任何方向的热应变都相同。温度变化引起的尺寸变化和应变为：



$$\Delta l_T = \alpha \Delta T l$$

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T$$



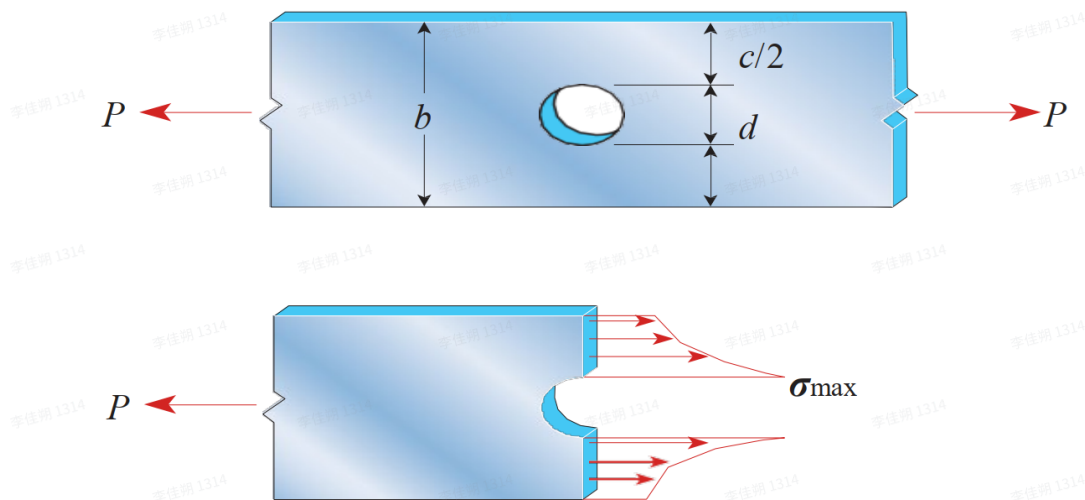
α 称为材料的线膨胀系数。

自由结构（静定结构）热应变不会产生应力。

15. 装配应力

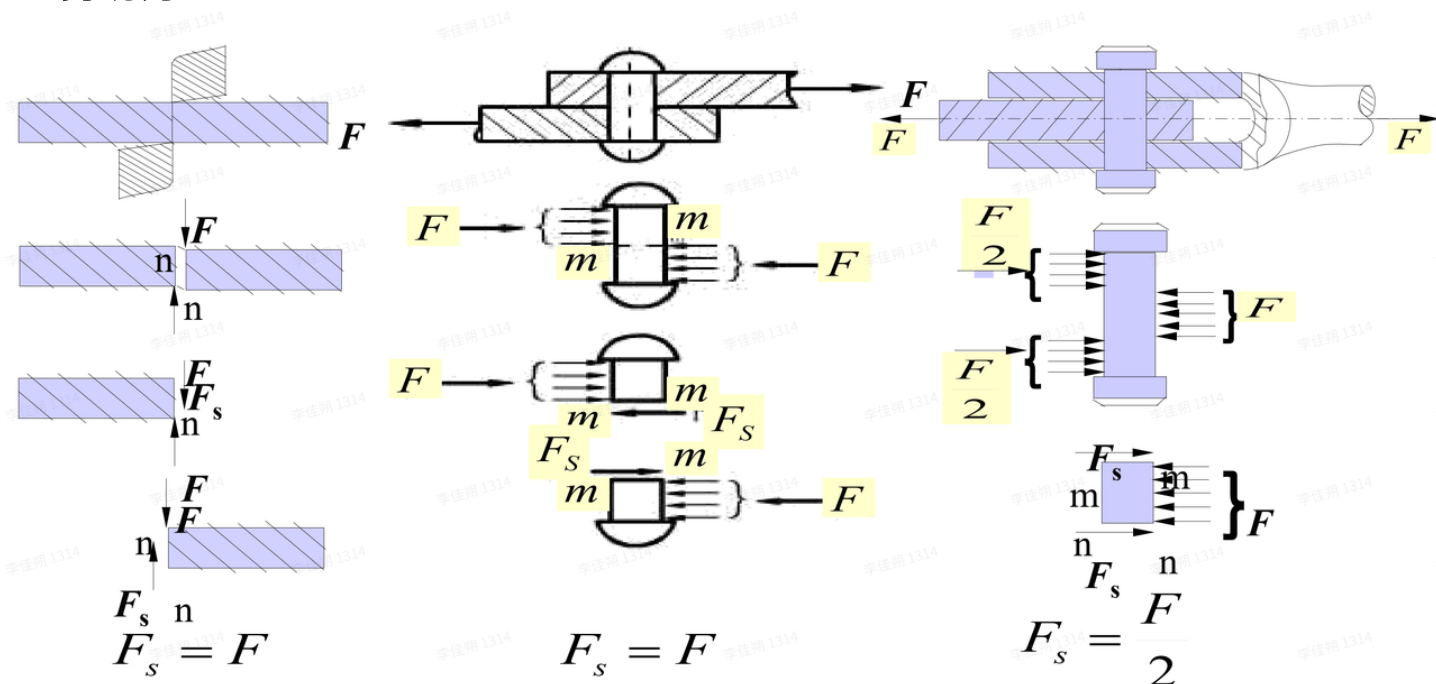
16. 应力集中因数

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma}$$



17. 剪切的实用计算

1. 剪切力



2. 切应力

$$\tau = \frac{F_s}{A}$$

- 其中 A 为横截面积

切应力强度条件:

$$\tau = \frac{F_s}{A} \leq [\tau]$$

18. 挤压的实用计算

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}}$$

- 其中 A_{bs} 为投影面积

*注意挤压面面积的计算

(1) 接触面为平面

A_{bs} —实际接触面面积

(2) 接触面为圆柱面

A_{hs} —直径投影面面积

挤压强度条件:

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$$

扭转问题

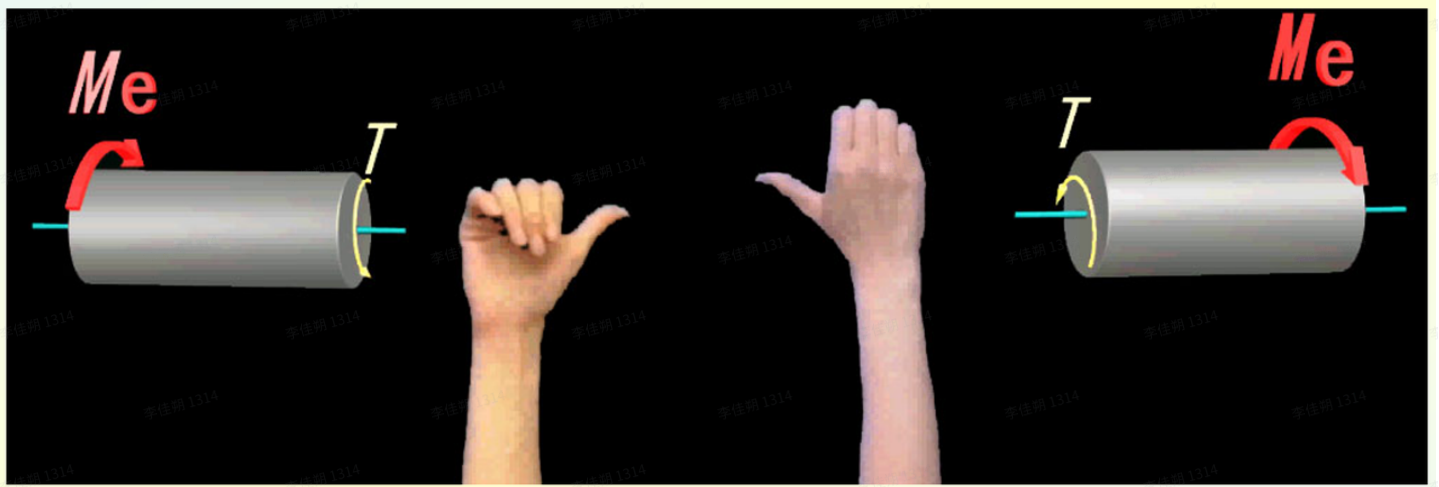
1. 输入功率和转速计算扭矩

- 注意单位!

已知
轴转速— n 转/分钟
输出功率— P 千瓦
求: 力偶矩 M_e

$$M_e = \frac{60000}{2\pi n} P = 9549 \frac{P}{n} \text{ (牛顿米)}$$

2. 扭矩正负规定

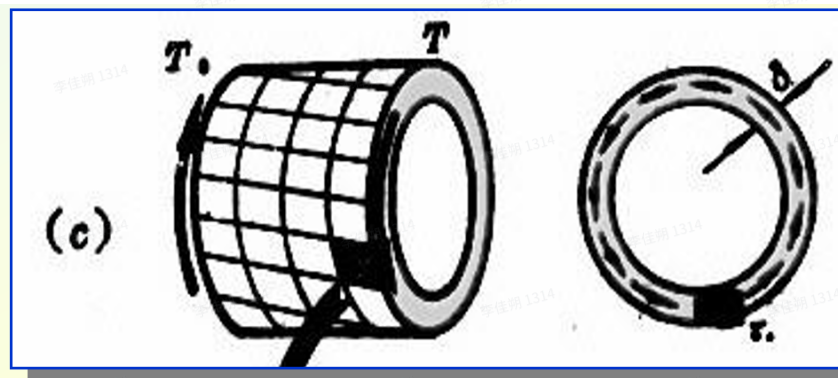


右手螺旋法则

右手拇指指向外法线方向为**正 (+)**, 反之为**负 (-)**

3. 薄壁圆筒的切应力

$$\tau = \frac{M_e}{2\pi r^2 \delta}$$



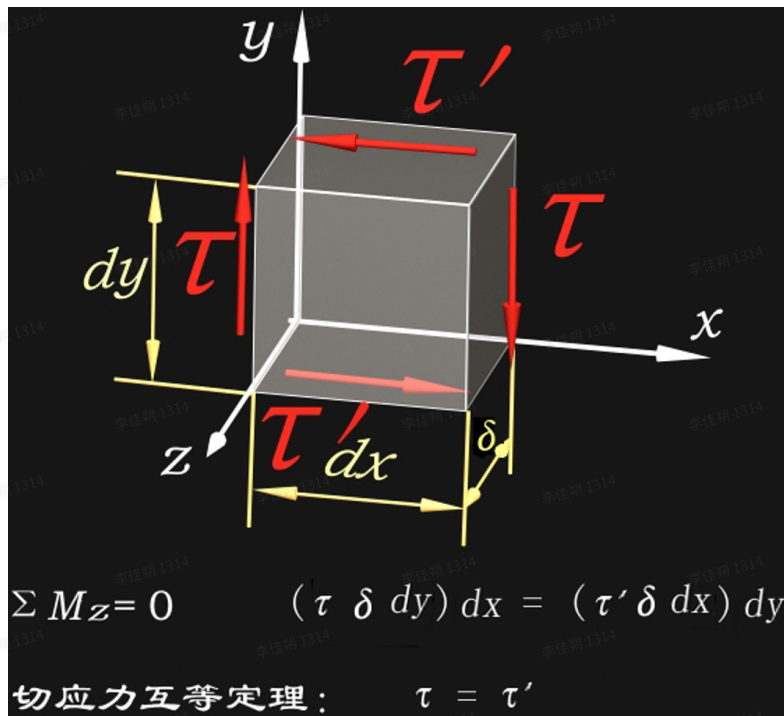
由平衡方程，得

$$\sum M_z = 0 \quad M_e = 2\pi r \delta \cdot \tau \cdot r$$

$$\tau = \frac{M_e}{2\pi r^2 \delta}$$

4. 切应力互等定理

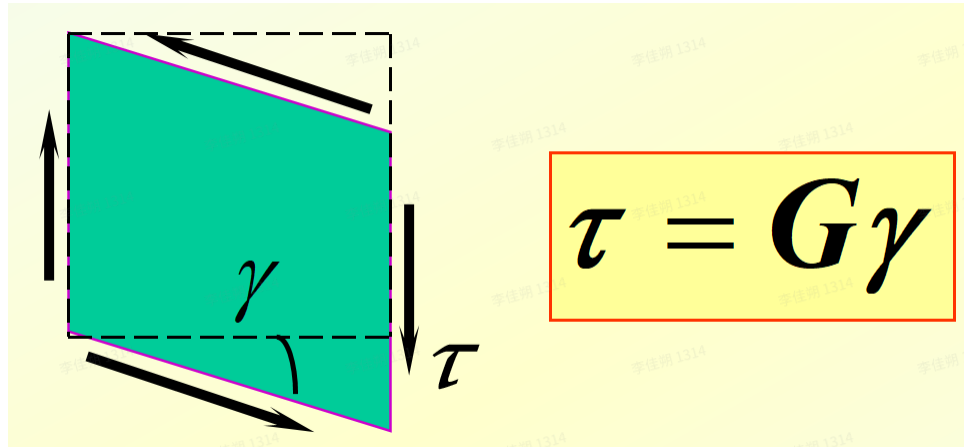
$$\tau = \tau'$$



5. 剪切胡克定律

$$\tau = G\gamma$$

- 其中 τ 为切应力, γ 为切应变, G 为剪切弹性模量 (GN/m^2)
- 条件: 切应力不超过剪切比例极限



6. 三个弹性常数之间的关系

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

7. 圆轴扭转时的应力

1. 物理关系

$$\tau_{\rho} = G\gamma_{\rho} = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

- 其中 ρ 为该点到圆心的距离

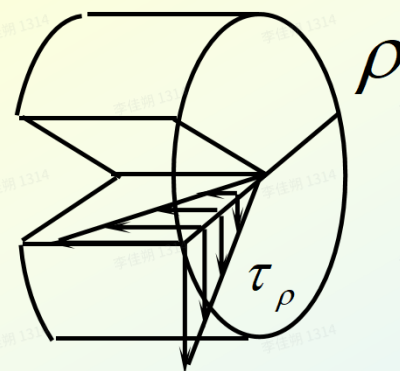
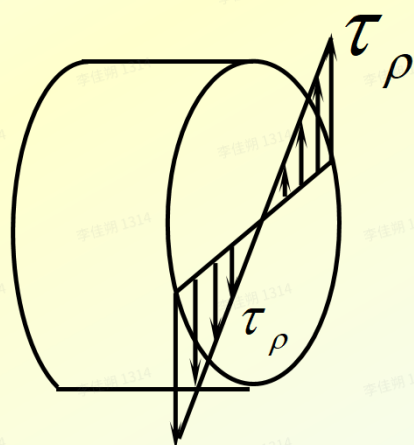
距圆心为 ρ 处的切应力:

$$\tau_{\rho} = G\gamma_{\rho} = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\tau_{\rho} \propto \rho$$

τ_{ρ} 垂直于半径

横截面上任意点的切应力 与该点到圆心的距离 成正比。



2. 静力关系

$$\tau_{\rho} = \frac{T}{I_p} \rho$$

- 其中 ρ 为该点到圆心的距离, I_p 为横截面对形心的极惯性矩

$$\tau_{\rho} = \frac{T}{I_p} \rho$$

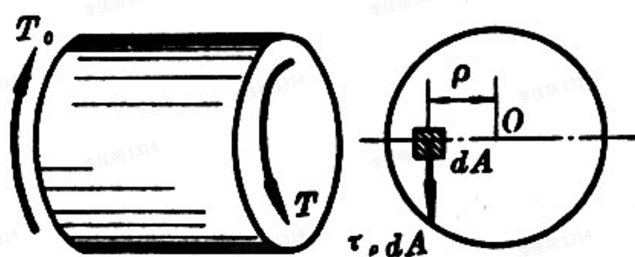


图 3-13

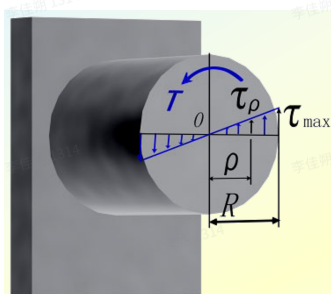
I_p — 横截面对形心的极惯性矩

3. 抗扭截面系数

$$1. \text{ 抗扭截面系数 } W_t = \frac{I_p}{R}$$

$$2. \tau_{max} = \frac{T}{W_t}$$

- 在圆截面边缘上，有最大切应力



$$\tau_{max} = \frac{T R}{I_P} = \frac{T}{\frac{I_P}{R}}$$

令 $W_t = \frac{I_P}{R}$ 抗扭截面系数

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t}$$

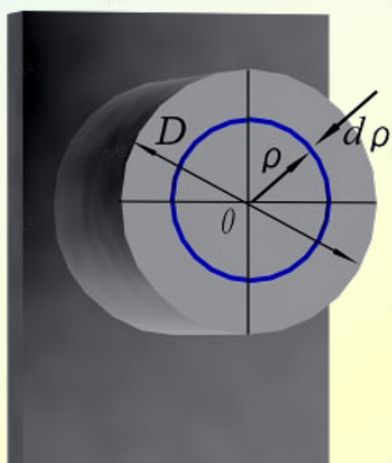
4. 实心轴与空心轴的极惯性矩与抗扭截面系数

- 注：空心轴的 $I_P = \frac{1}{32} \pi (D^4 - d^4)$, $W_t = I_P / R$



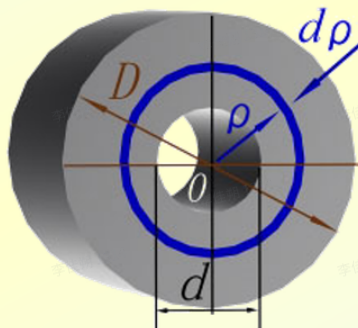
注意空心轴 W_t 乘的是 $1 - \alpha^4$

实心轴与空心轴 I_P 与 W_t 对比



$$I_P = \frac{1}{32} \pi D^4$$

$$W_t = I_P / R = \frac{1}{16} \pi D^3$$



$$I_P = \frac{1}{32} \pi D^4 [1 - \alpha^4]$$

$$W_t = I_P / (D/2) = \frac{1}{16} \pi D^3 [1 - \alpha^4]$$

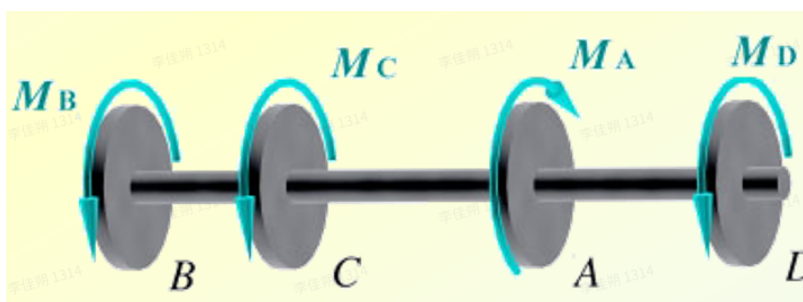
5. 扭转强度条件

扭转强度条件： $\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_t} \leq [\tau]$

8. 圆轴扭转时的变形

1. 微分形式: $d\varphi = \frac{T dx}{GI_p}$
 2. 积分形式: $\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$
 3. 单位长度扭转角: $\varphi' = \frac{T}{GI_p}$
 4. 切应变: $\gamma = \rho\varphi' = \rho \frac{d\varphi}{dx}$
- GI_p 为抗扭刚度

$$d\varphi = \frac{T dx}{GI_p} \quad \varphi = \int_{\ell} d\varphi = \int_{\ell} \frac{T dx}{GI_p} = \frac{T \ell}{GI_p}$$



$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{T_i l_i}{GI_{Pi}}$$

φ 相对扭转角 GI_p 抗扭刚度

单位长度扭转角

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \quad \text{rad/m}$$

$$\varphi' = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} \quad \text{°/m}$$

$$\gamma_{\rho} = \rho \frac{d\varphi}{dx}$$

扭转刚度条件

扭转刚度条件 $\varphi'_{\max} \leq [\varphi']$ $[\varphi']$ 许用单位扭转角

9. 圆轴扭转的应变能

$$V_{\varepsilon} = W = \frac{T^2 l}{2GI_p}$$

- 条件：线弹性范围内

在线弹性范围内，等直圆轴两端扭的相对扭转角

$$V_{\varepsilon} = W = \frac{T^2 l}{2GI_p}$$

变截面圆轴扭转应变能

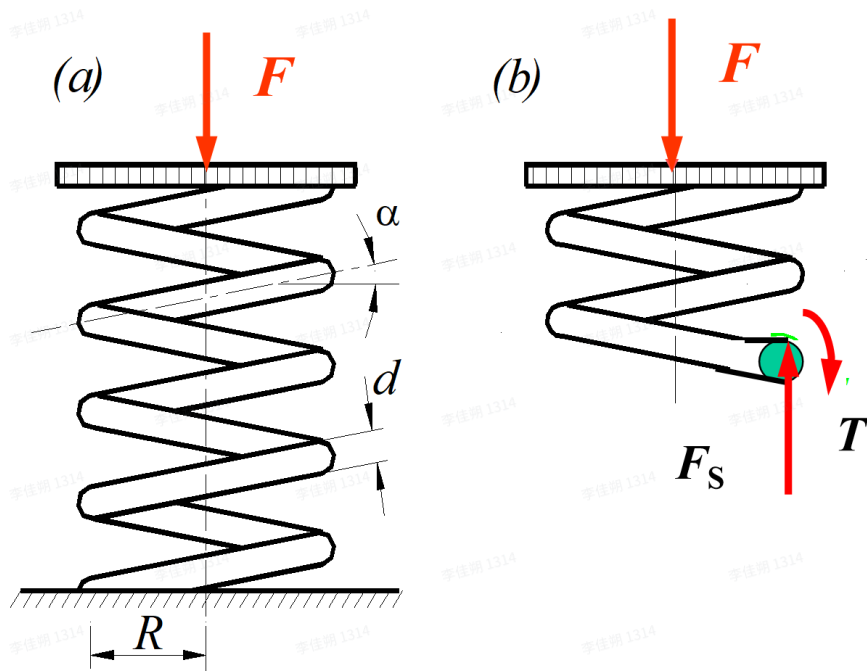
变截面圆轴任意扭转的应变能为

$$V_{\varepsilon} = \int dV_{\varepsilon} = \int_l \frac{T^2}{2GI_p} dx$$

10. 弹簧

1. 弹簧内力

$$F_s = F \quad T = \frac{FD}{2}$$



2. 弹簧应力

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{FD/2}{\pi d^3/16} = \frac{8FD}{\pi d^3}$$

3. 弹簧应力的修正

公式修正的原因：（1）当 D/d 较小，会引起很大的误差；
（2）假定剪切引起的切应力是均匀分布的。

$$\tau_{\max} = \left(\frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c} \right) \frac{8FD}{\pi d^3} = k \frac{8FD}{\pi d^3}$$

式中 $c = \frac{D}{d}$, $k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c}$

c 为弹簧指数, k 为曲度系数, 可查教材中的表3.1

表 3.1 螺旋弹簧的曲度系数 k

c	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	12	14
k	1.40	1.35	1.31	1.28	1.25	1.23	1.21	1.20	1.18	1.17	1.16	1.15	1.14	1.12	1.10

4. 弹簧强度条件

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

5. 弹簧应变能

$$v_{\varepsilon} = \frac{T^2 l}{2GI_p}$$

$$T = \frac{FD}{2}$$

$$l = n\pi D$$

$$v_{\varepsilon} = \frac{4F^2 D^3 n}{Gd^4}$$

6. 外力做功



此处 λ ， c 的公式不用记忆

当弹簧的变形为 λ 时，外力所做的功为

$$W = \frac{1}{2} F \lambda$$

$$\lambda = \frac{F}{c} \quad c \text{ — 弹簧刚度}$$

$$\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4} = \frac{64FR^3n}{Gd^4} \quad \text{令 } c = \frac{Gd^4}{8D^3n} = \frac{Gd^4}{64R^3n}$$

11. 非圆截面杆扭转

整个横截面上的最大切应力发生在长边的中点.

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} \quad W_t = \alpha hb^2 \quad \varphi = \frac{Tl}{GI_t} \quad I_t = \beta hb^3$$

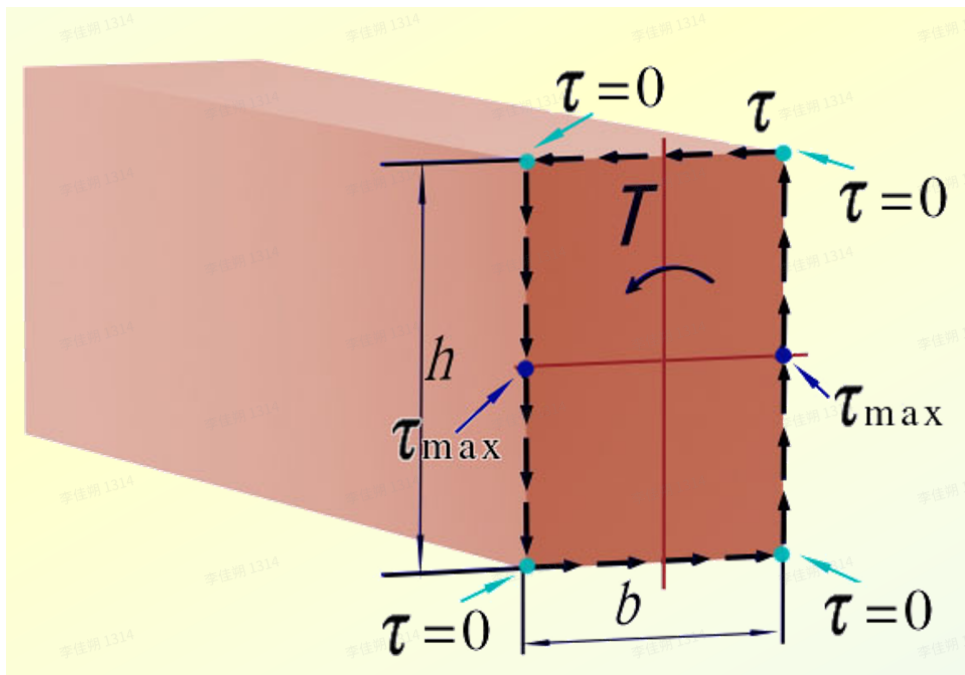
短边中点的切应力 τ 是短边上的最大切应力, 且 $\tau_1 = \nu \tau_{\max}$

$$\varphi' = \frac{T}{GI_t} = \frac{4000}{80 \times 10^9 \times 286 \times 10^{-8}} = 0.01745 \text{ rad/m} = 1^\circ/\text{m} < [\varphi']$$

表3-1 矩形截面杆在纯扭转时的系数 $\alpha\beta\nu$

h/b	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	∞
α	0.208	0.219	0.231	0.246	0.256	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
ν	1.000	0.930	0.858	0.796	0.767	0.753	0.745	0.743	0.743	0.743	0.743

杆件扭转时, 横截面上边缘各点的切应力都与截面边界相切



12. 狭长矩形截面杆

- 相当于 $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$

狭长矩形截面的 I_t 和 W_t

$$I_t = \frac{1}{3} h \delta^3 \quad W_t = \frac{1}{3} h \delta^2$$

狭长矩形截面杆。切应力的分布情况见图。切应力在沿长边各点处的方向均与长边相切其数值, 除在靠近顶点处以外均相等。

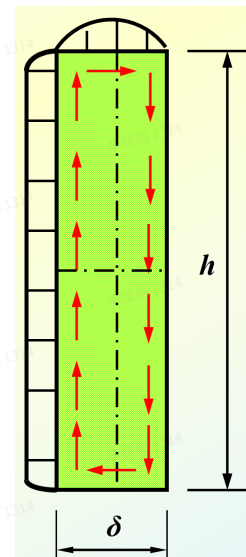


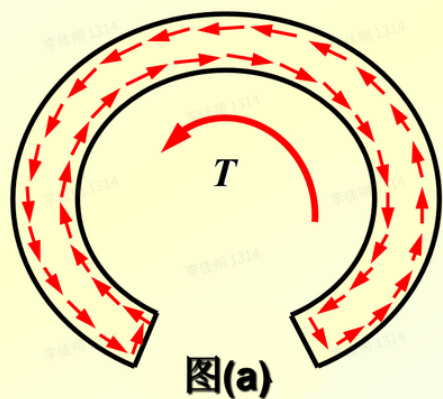
表3-1 矩形截面杆在纯扭转时的系数 $\alpha\beta\nu$

h/b	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	∞
α	0.208	0.219	0.231	0.246	0.256	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
ν	1.000	0.930	0.858	0.796	0.767	0.753	0.745	0.743	0.743	0.743	0.743

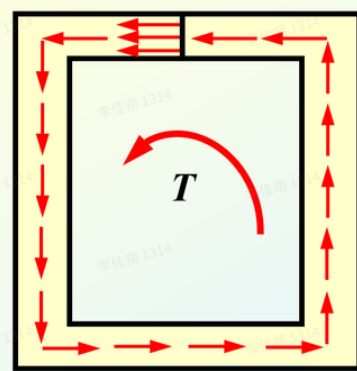
13. 开口/闭口薄壁杆件扭转

开口/闭口薄壁杆件扭转

- 开口薄壁截面杆在自由扭转时的切应力分布如图 (a)，厚度中点处，切应力为零；
- 闭口薄壁截面杆在自由扭转时的切应力分布如图 (b)，同一厚度处，切应力均匀分布。



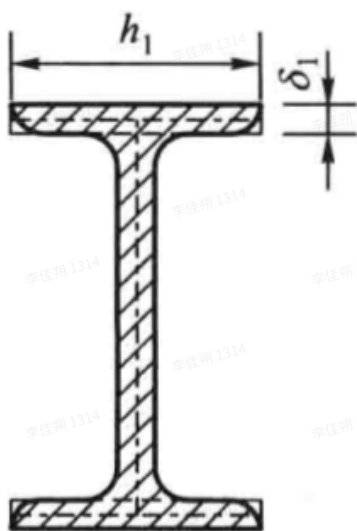
图(a)



图(b)

1. 开口薄壁杆件扭转

- 分成若干个薄壁杆件(狭长矩形)，高度为 h ，厚度为 δ



(a)

引用记号

$$I_t = \sum \frac{1}{3} h_i \delta_i^3 \quad (e)$$

式(d)又可写成

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_t} \quad (f)$$

式中 GI_t 即为开口薄壁杆件的抗扭刚度。

由此解出 T_i , 代入式(g)得出

$$\tau_i = \frac{T\delta_i}{I_t} \quad (h)$$

由式(h)看出, 当 δ_i 为最大时, 切应力 τ_i 达到最大值。故 $\tau_{\max}$ 发生在宽度最大的狭长矩形的长边上, 且

$$\tau_{\max} = \frac{T\delta_{\max}}{I_t} \quad (3.30)$$

计算槽钢、工字钢等开口薄壁杆件的 I_t 时, 应对式(e)略加修正, 这是因为在这些型钢截面上, 各狭长矩形连接处有圆角, 翼缘内侧有斜度, 这增加了杆件的抗扭刚度。修正公式为

$$I_t = \eta \cdot \frac{1}{3} \sum h_i \delta_i^3 \quad (i)$$

式中 η 为修正因数。对角钢 $\eta = 1.00$, 槽钢 $\eta = 1.12$, T 字钢 $\eta = 1.15$, 工字钢 $\eta = 1.20$ 。

中线为曲线的开口薄壁杆件(图 3.27), 计算时可将截面展直, 作为狭长矩形截面处理①。

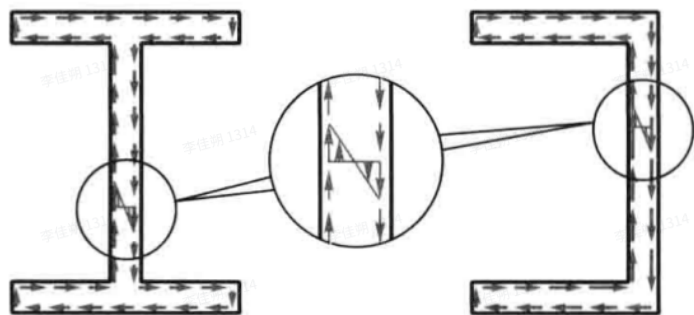


图 3.26

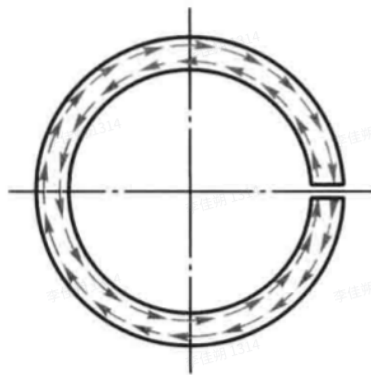
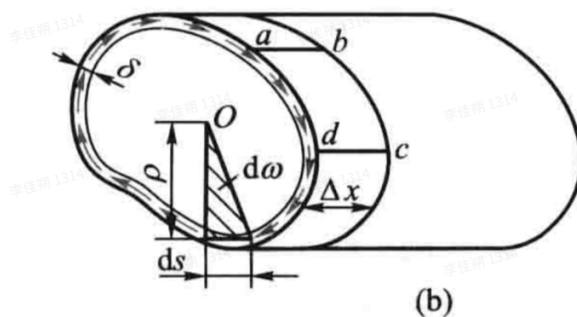


图 3.27

2. 闭口薄壁杆件扭转

- δ 是某一截面厚度， ω 为厚度中线所包围面积
- 椭圆形面积公式 $S = \pi ab$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\delta_{\min}\omega}$$

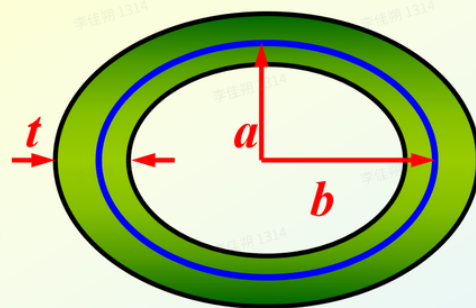


$$\omega = \oint \frac{1}{2} \rho ds = \int_{\omega} d\omega \text{ 为厚度中线所包围面积}$$

例12 图示椭圆形薄壁截面杆，横截面尺寸为：
 $a=50 \text{ mm}$ ， $b=75 \text{ mm}$ ，厚度 $t=5 \text{ mm}$ ，杆两端受扭转
 力偶 $T=5000 \text{ N}\cdot\text{m}$ ，试求此杆的最大切应力。

解：闭口薄壁杆自由扭转时的最大切应力

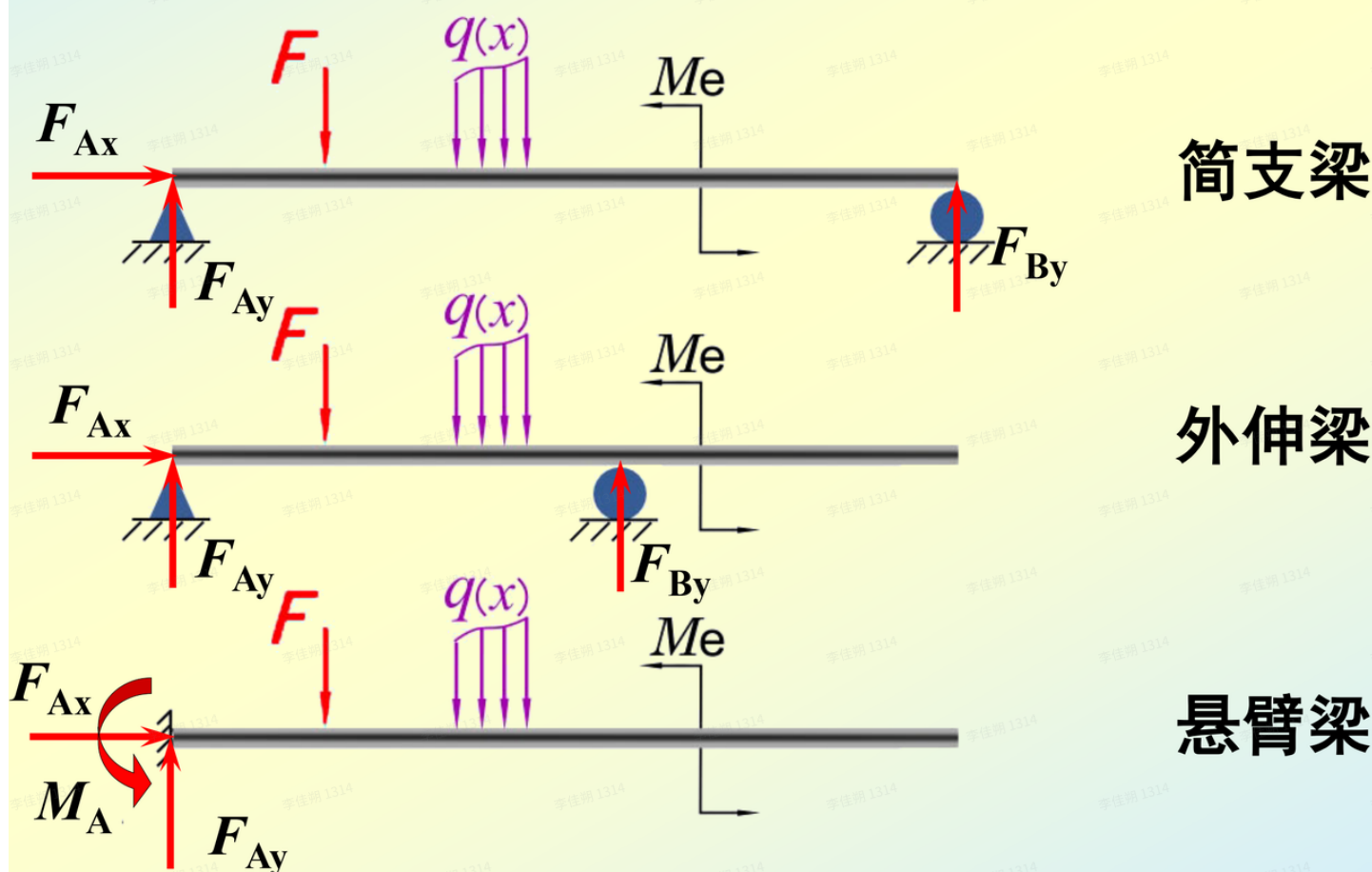
$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{T}{2\delta_{\min}\omega} = \frac{T}{2t\pi ab} \\ &= \frac{5000}{2\pi \times 5 \times 50 \times 75 \times 10^{-9}} = 42.5 \text{ MPa} \end{aligned}$$



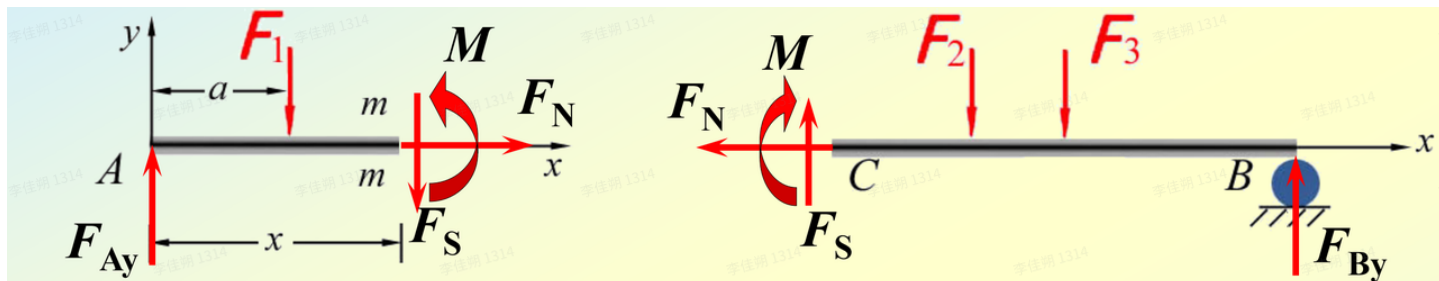
弯曲问题

1. 静定梁的基本形式

静定梁的基本形式

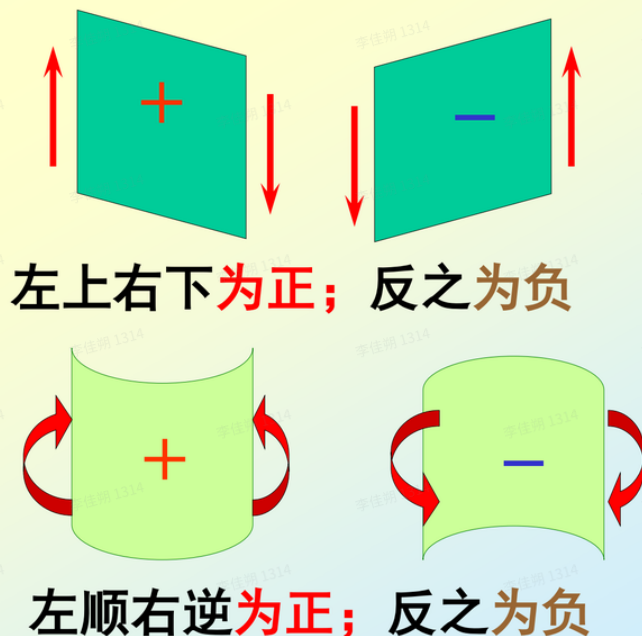


2. 剪力和弯矩的正负



截面上的剪力对所选梁段上任意一点的矩为**顺时针**转向时，**剪力为正**；反之为**负**。

截面上的弯矩使得梁呈**凹形**为**正**；反之为**负**。



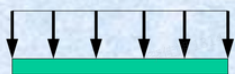
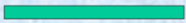
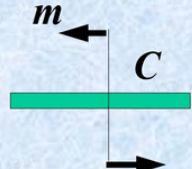
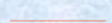
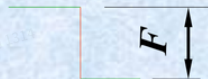
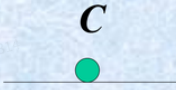
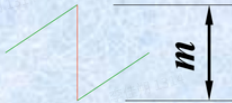
3. 载荷集度、剪力和弯矩关系

载荷集度、剪力和弯矩关系：

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

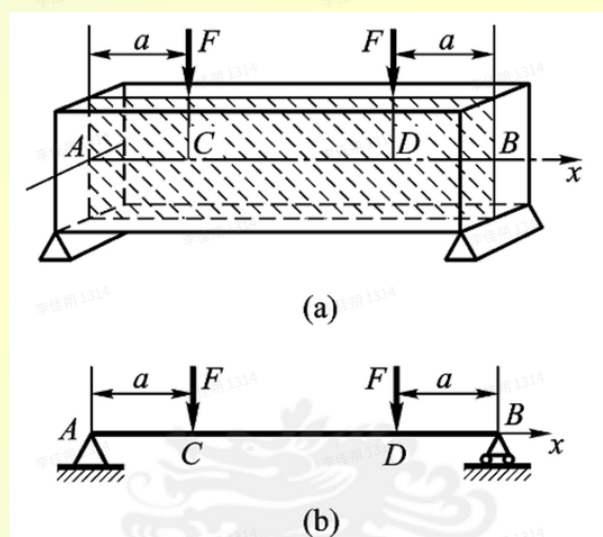
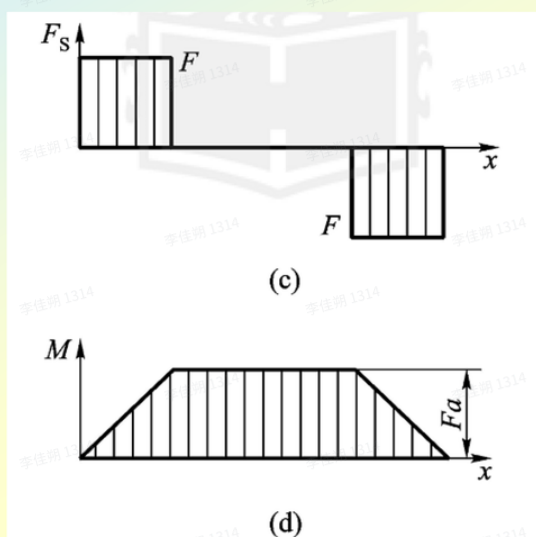
4. 不同荷载下剪力图与弯矩图的特征

在几种荷载下剪力图与弯矩图的特征

一段梁上的外力情况	向下的均布荷载 $q < 0$ 	无荷载 	集中力 	集中力偶 
剪力图的特征	向下倾斜的直线 	水平直线 	在C处有突变 	在C处无变化 
弯矩图的特征	上凸的二次抛物线 	一般斜直线 或 	在C处有转折 	在C处有突变 
$M_{\max}$ 所在截面的可能位置	在 $F_S = 0$ 的截面		在剪力突变的截面	在紧靠C的某一侧截面

5. 纯弯曲

纯弯曲



梁CD段，只有弯矩，没有剪力——**纯弯曲**
梁AC段和BD段，有弯矩又有剪力——**横力弯曲**

6. 纤维假设与中性层、中性轴

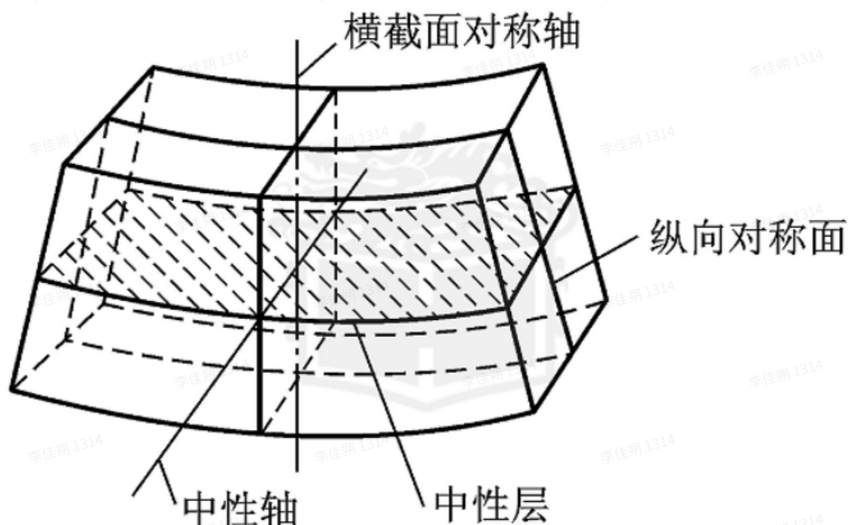
设想梁是由无数层纵向纤维组成

凹入一侧纤维缩短

突出一侧纤维伸长

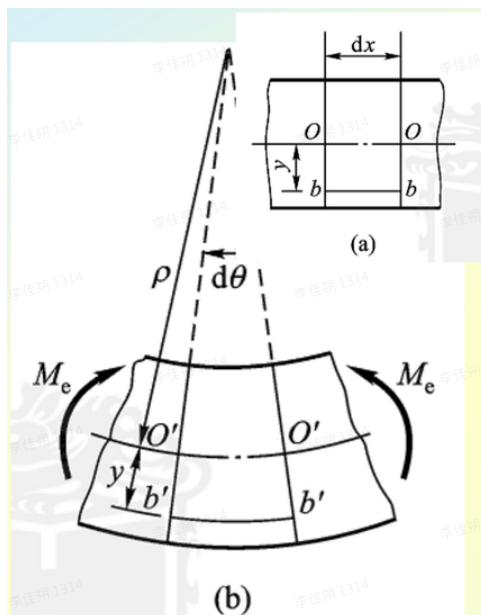
中间一层纤维长度不变——中性层

中间层与横截面的交线——中性轴



7. 弯曲应力

1. 变形几何关系



分析与OO之间距离为 y 处线段 bb 的变形。线段 bb 变形后弧线 $b'b'$ 的曲率半径为 $\rho + y$ (这里假设沿高度方向的变形可以忽略), 因此弧线 $b'b'$ 的长度为:

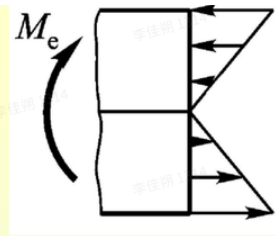
$$b'b' = (\rho + y) d\theta$$

线段 bb 的应变为:

$$\varepsilon = \frac{b'b' - bb}{bb} = \frac{(\rho + y) d\theta - dx}{dx} = \frac{y d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

2. 物理关系

纯弯曲的应力假设：沿宽度和高度方向的挤压应力可以忽略不计，只有沿轴线方向的正应力不为零，每根纵向纤维都处于单向的应力状态。



可以使用胡克定律：

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$



$$\sigma = E \frac{y}{\rho}$$

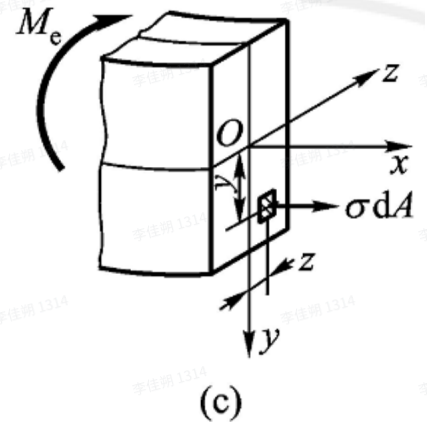
结论：横截面上的正应变和正应力沿高度方向呈线性分布，一边受压，另一边受拉。根据变形和应力假设，沿宽度方向，正应变和正应力保持不变。

3. 静力学关系(易漏)

$$M_z = \frac{EI_z}{\rho} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

I_z 称为横截面对于 z 轴的轴惯性矩。是一个几何特性。

EI_z 称为截面的抗弯刚度。



4. 正应力



y与z的对应： $\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$

- 正应力大小与其到中性轴距离成正比；
- 与中性轴距离相等的点，正应力相等；
- 中性轴上,正应力等于零

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

抗弯截面系数

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$$

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \quad \text{公式适用范围}$$

- 细长梁的**纯弯曲**或**横力弯曲**
- 弹性变形阶段

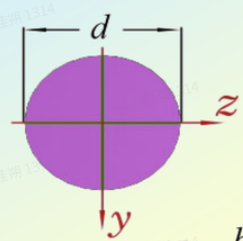
弹性力学精确分析表明，当跨度 l 与横截面高度 h 之比 $l/h > 5$ (细长梁) 时，纯弯曲正应力公式对于横力弯曲近似成立。

5. 常见截面的 I_z 与 W_z



对于圆轴与空心圆轴， $I_p = 2I_z$

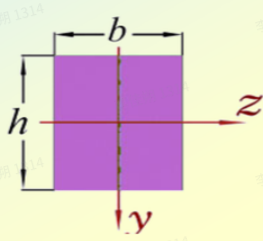
常见截面的 I_z 和 W_z



圆截面

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$

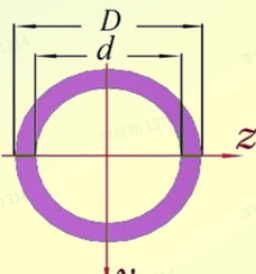
$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}$$



矩形截面

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

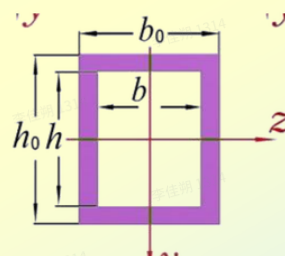
$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$



空心圆截面

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$$

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$$



空心矩形截面

$$I_z = \frac{b_0 h_0^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

$$W_z = (\frac{b_0 h_0^3}{12} - \frac{bh^3}{12}) / (h_0 / 2)$$

6. 弯曲正应力强度条件

弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

1. 等截面梁弯矩最大的截面上

2. 离中性轴最远处

3. 变截面梁要综合考虑 M 与 I_z

4. **脆性材料**抗拉和抗压性能不同，两方面都要考虑

$$\sigma_{t,\max} \leq [\sigma_t] \quad \sigma_{c,\max} \leq [\sigma_c]$$

7. 切应力

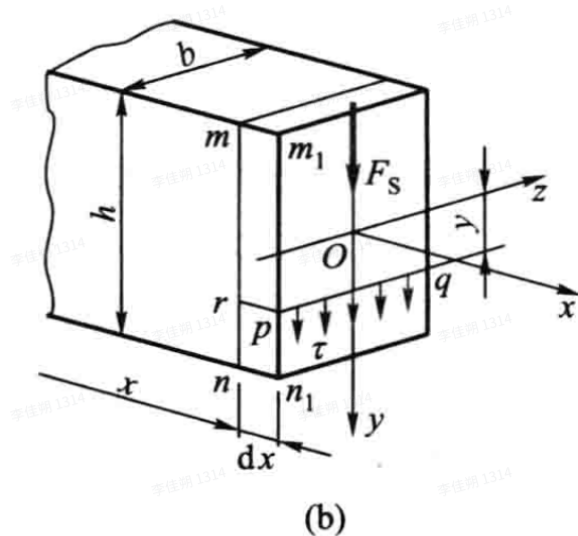
- b是截面宽度

根据力的微分关系:

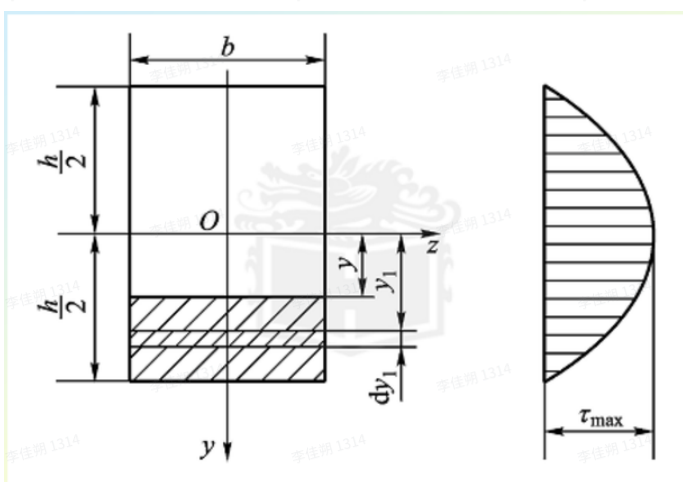
$$\frac{dM}{dx} = F_s \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}$$

$$S_z^* = \int_{A_1} y_1 dA$$

为截面上距中性轴为 y 的横线 (要计算切应力位置) 以外部分面积对中性轴的静矩



1. 矩形截面梁



$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b} = \frac{F_s}{I_z b} \int_{A_1} y_1 dA = \frac{F_s}{2 I_z b} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

剪切应力沿高度方向呈抛物线分布：

- 上下表面剪切应力为零
- 越靠近中心轴剪切应力越大
- 在中心轴上剪切应力达到最大值

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F_s}{A}$$

2. 圆形截面梁

- 两端切应力为零，两端到中心切应力变大

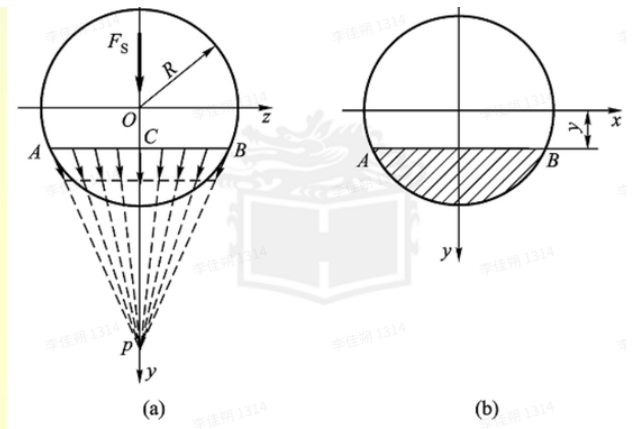
在边界上切应力必须沿着边界的方向, 所以我们对切应力的分布做如图这样的假设, 同时假设水平横截面上切应力沿高度方向的分量相等, 从而可以得到中心轴上的最大切应力为

$$\tau_y = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}$$

在中心轴上, 切应力最大:

$$b = 2R, S_z^* = \frac{\pi R^2}{2} \frac{4R}{3\pi}, I_z = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\tau_{\max} = \frac{4F_s}{3\pi R^2}$$



3. 工字形截面梁

三、工字形截面梁

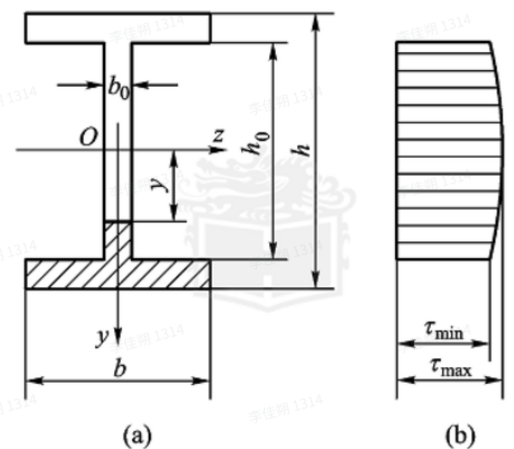
矩形截面的切应力假设依旧可以适用,

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b_0} \quad S_z^* = \frac{b}{8} (h^2 - h_0^2) + \frac{b_0}{2} \left(\frac{h_0^2}{4} - y^2 \right)$$

可见沿腹板高度, 切应力呈抛物线分布。
腹板上的最大和最小切应力分别为:

$$\tau_{\max} = \tau(y=0) = \frac{F_s}{8I_z b_0} (bh^2 - (b-b_0)h_0^2)$$

$$\tau_{\min} = \tau(y=h_0) = \frac{F_s b}{8I_z b_0} (h^2 - h_0^2)$$



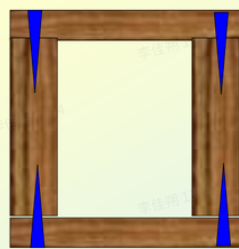
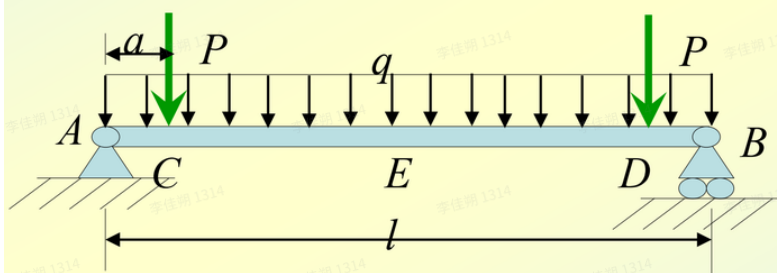
在工程应用中, 可以认为翼缘上的切应力远小于腹板上的切应力, 在腹板上的切应力近似均匀分布, 因此有

$$\tau = \frac{F_s}{b_0 h_0}$$

4. 考虑弯曲切应力的情况

有些情况必须考虑弯曲切应力

- 梁的跨度较短 ($l/h < 5$) ;
- 在支座附近作用较大载荷 (载荷靠近支座) ;
- 铆接或焊接的工字形或箱形等截面梁 (腹板、焊缝、胶合面或铆钉等)



8. ※提高弯曲强度的措施

1. 改善梁的受力情况

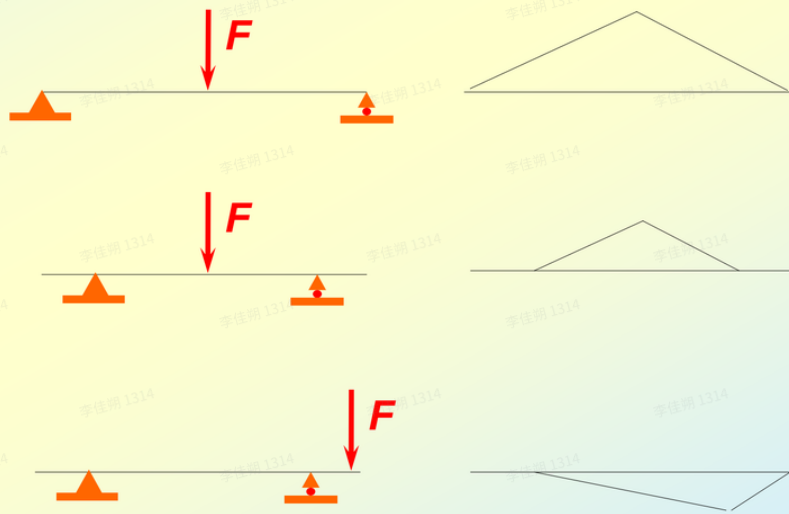
1. 改善梁的受力状况，以降低 $M_{\max}$

a 合理安排支座

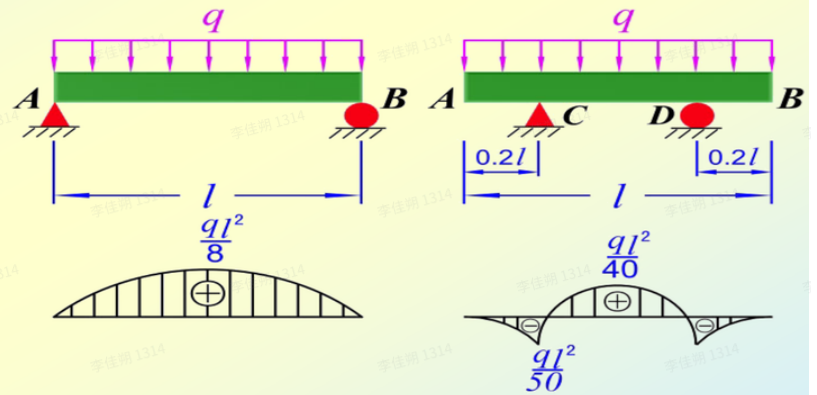
b 合理布置载荷

1. 合理安排支座

a 合理布置支座



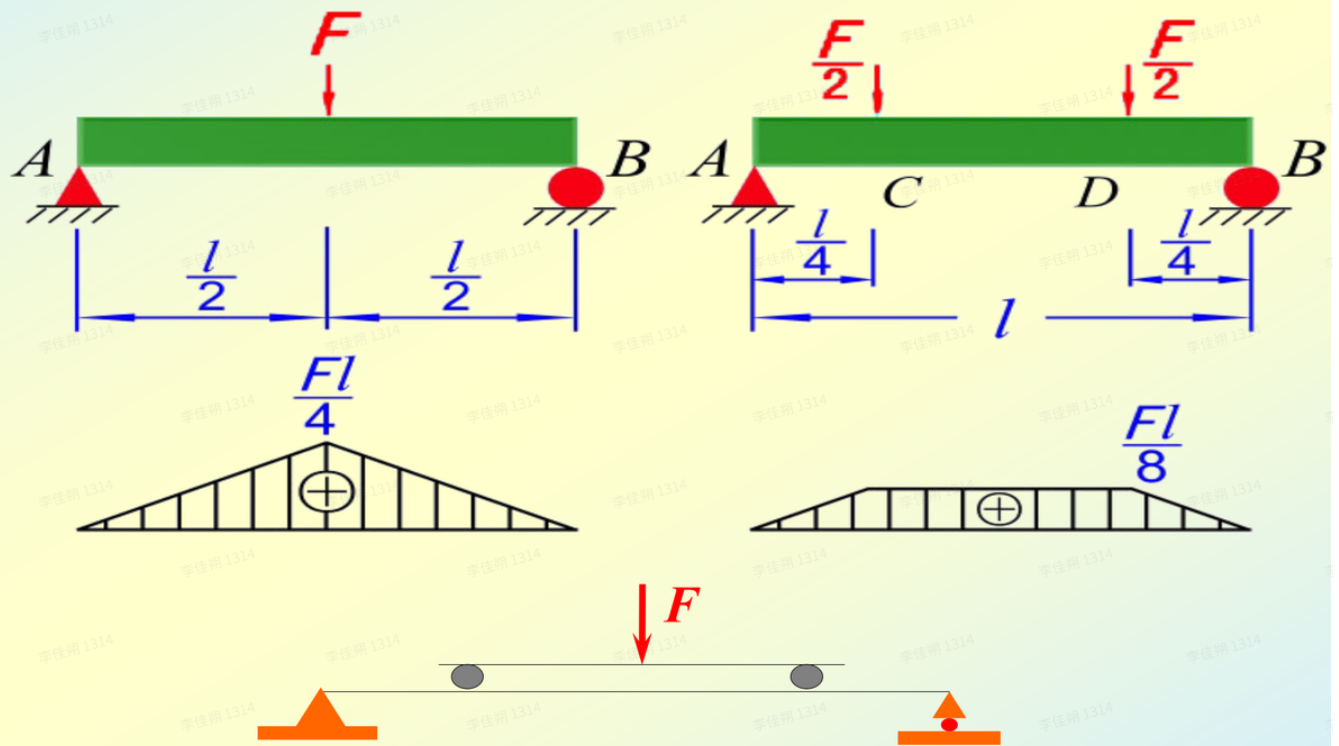
a 合理布置支座



支座靠中间一点比在两边好

2. 合理布置载荷

b 合理布置载荷



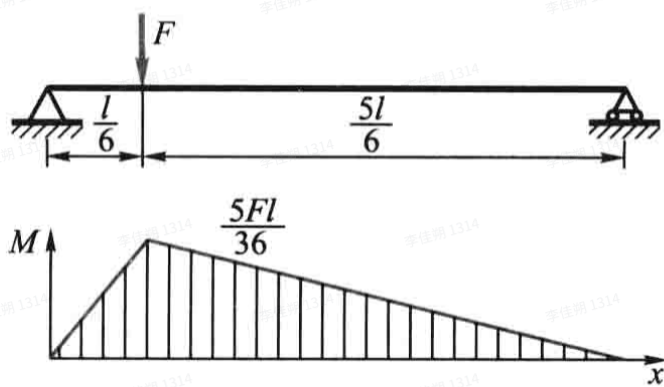


图 5.22

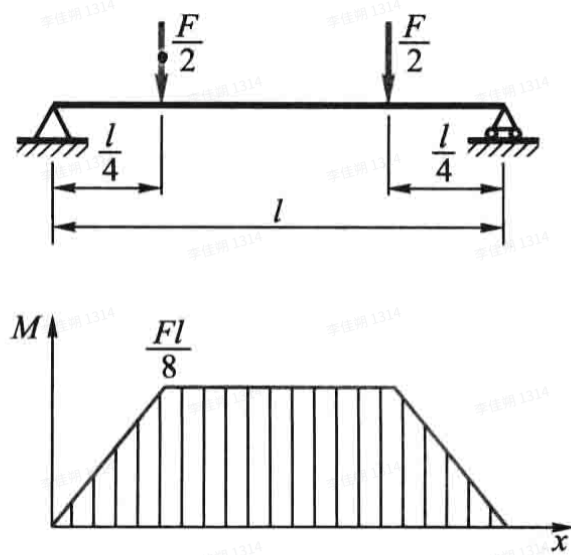


图 5.23



载荷分成两部分比集中载荷好，或者将力靠近支座

2. 选择梁截面的合理形状

2. 选择梁截面的合理形状，增大 W_z

a 合理设计截面

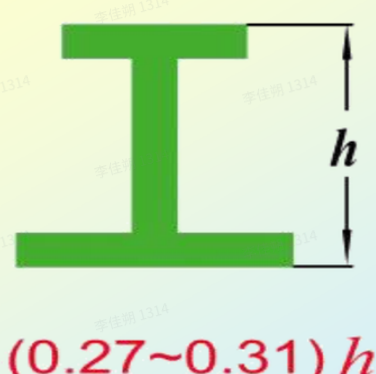
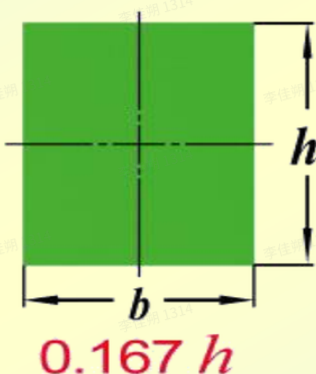
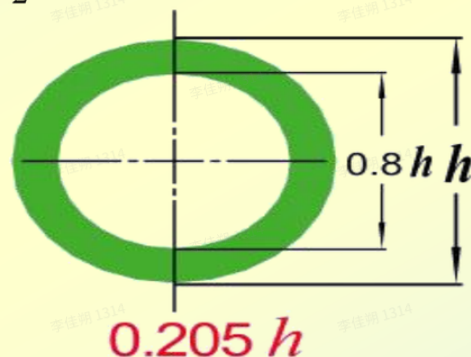
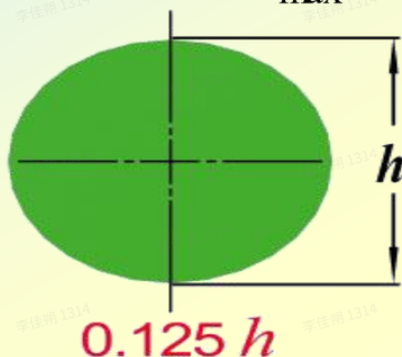
b 合理放置截面

1. 合理设计截面

a 合理设计截面

$$M_{\max} \leq [\sigma] W_z$$

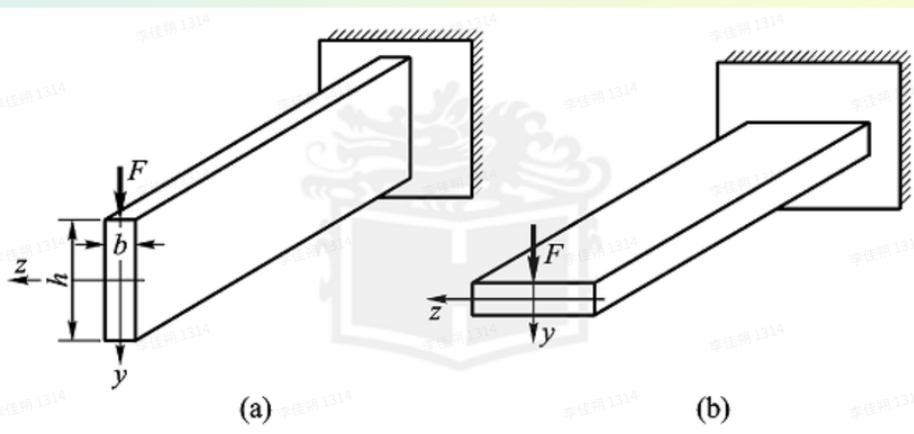
$$\frac{W}{A}$$



工字梁、槽钢比矩形截面合理，矩形截面比圆形截面合理

2. 合理放置截面

b 合理放置截面



$$W_{z\text{左}} = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_{z\text{右}} = \frac{hb^2}{6}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$



竖放比横放有更高的抗弯刚度

在讨论截面的合理形状时,还应考虑到材料的特性。

对抗拉和抗压强度相同的材料(如碳钢),宜采用对中性轴对称的截面,如圆形、矩形、工字形等。这样可使截面上、下边缘处的最大拉应力和最大压应力数值相等,并同时接近许用应力。对抗拉和抗压强度不相等的材料(如铸铁),宜采用中性轴偏向于受拉一侧的截面形状,例如图 5.26 中所表示的一些截面。对这类截面,如能使 y_1 和 y_2 之比接近于下列关系:

$$\frac{\sigma_{tmax}}{\sigma_{cmax}} = \frac{M_{max}y_1}{I_z} \bigg/ \frac{M_{max}y_2}{I_z} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}$$

式中 $[\sigma_t]$ 和 $[\sigma_c]$ 分别表示拉伸和压缩的许用应力,则最大拉应力和最大压应力便可同时接近许用应力。

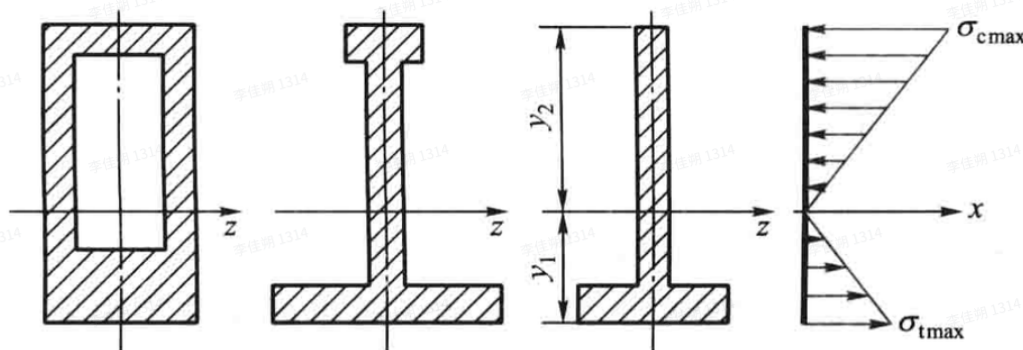


图 5.26



t (tension)表示拉, c (compress)表示压

3. 等强度梁

于许用应力,就是等强度梁。设梁在任一截面上的弯矩为 $M(x)$,而截面的抗弯截面系数为 $W(x)$ 。根据上述等强度梁的要求,应有

$$\sigma_{max} = \frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma]$$

或者写成

$$W(x) = \frac{M(x)}{[\sigma]} \quad (5.15)$$

这是等强度梁的 $W(x)$ 沿梁轴线变化的规律。

若图 5.27a 所示在集中力 F 作用下的简支梁为等强度梁, 截面为矩形, 且设截面高度 $h = \text{常数}$, 而宽度 b 为 x 的函数, 即 $b = b(x) \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right)$, 则由公式 (5.15),

$$W(x) = \frac{b(x)h^2}{6} = \frac{M(x)}{[\sigma]} = \frac{\frac{F}{2}x}{[\sigma]}$$

于是

$$b(x) = \frac{3F}{[\sigma]h^2}x \quad (c)$$

截面宽度 $b(x)$ 是 x 的一次函数(图 5.27b)。因为载荷对称于跨度中点, 因而截面形状也应对跨度中点对称。按照式(c)所表示的关系, 在梁的两端, $x = 0$, $b(x) = 0$, 即截面宽度等于零。这显然不能满足剪切强度要求。因而要按剪切强度条件确定支座附近截面的宽度。设所需要的最小截面宽度为 $b_{\min}$ (图 5.27c), 根据切应力强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F_{S\max}}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{\frac{F}{2}}{b_{\min}h} = [\tau]$$

由此求得

$$b_{\min} = \frac{3F}{4h[\tau]} \quad (d)$$

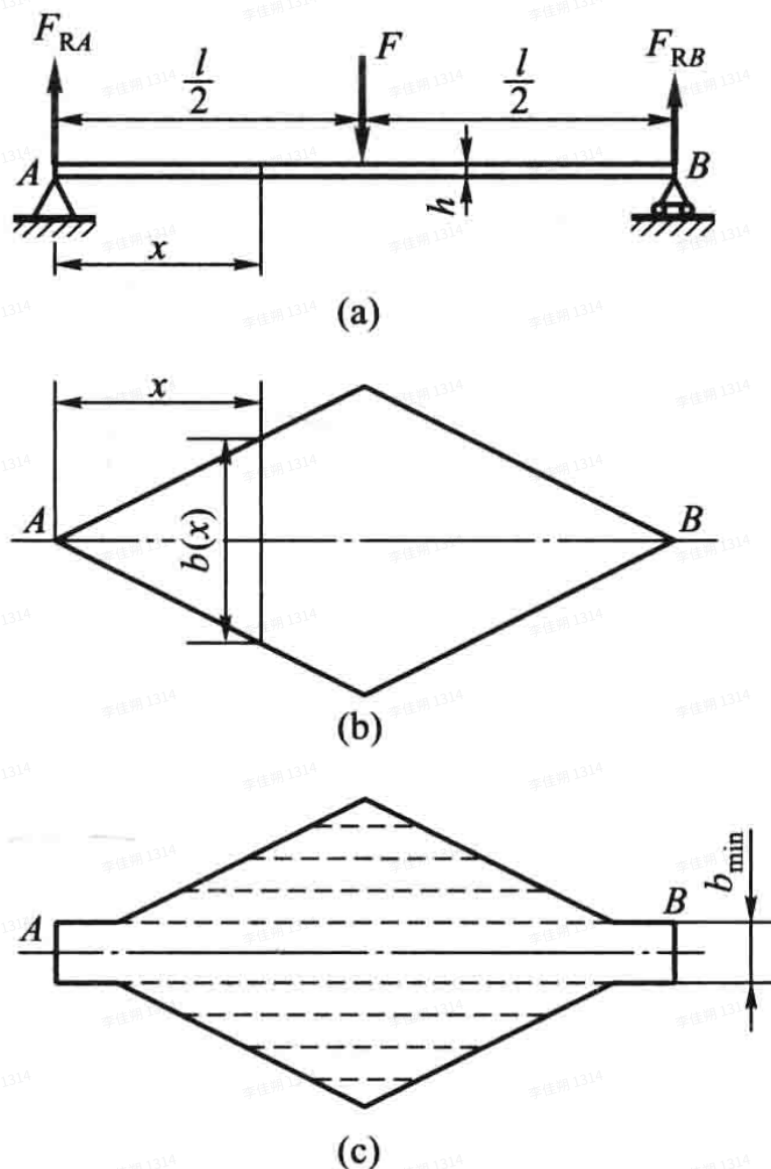


图 5.27

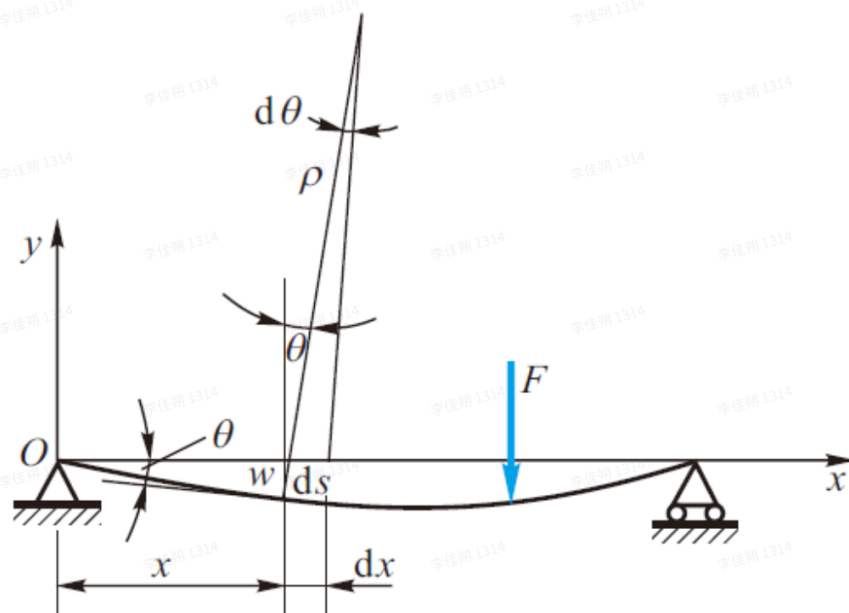
9. 轴线、挠度、转角、挠曲线方程

- **轴线**：横截面形心的连线。用来表示梁的位置。
- **挠度 (Deflection)**：横截面形心 C 在垂直于 x 轴方向的线位移（侧向位移），称为该截面的挠度，用 $w(x)$ 或者 $y(x)$ 来表示。
- **转角**：横截面对其原来位置的角位移，称为该截面的转角，用 θ 表示。

➤ 挠曲线方程:

$$w = f(x)$$

式中, x 为梁变形轴线的横坐标, w 为该点的挠度。



10. 挠度与转角的关系

➤ 挠度与转角的关系(小变形):

$$\theta \approx \tan \theta = w' = w'(x)$$

11. 挠曲线微分方程



与弯曲应力的静力学关系公式一致

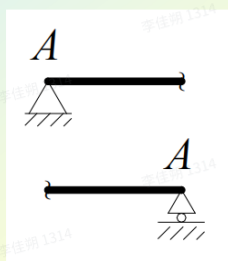
由弯矩的正负号规定可得，弯矩的符号与挠曲线的二阶导数符号一致，所以挠曲线的近似微分方程为：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z} \quad \text{小变形情况下成立}$$

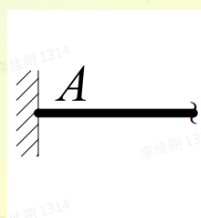
由上式进行积分，就可以求出梁横截面的转角和挠度。

12. 位移边界条件与光滑连续条件

位移边界条件

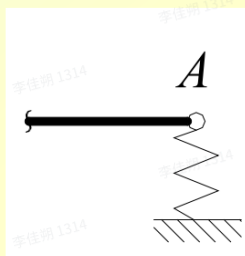


$$y_A = 0$$



$$y_A = 0$$

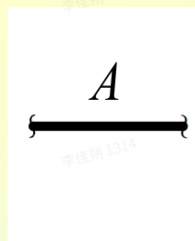
$$\theta_A = 0$$



$$y_A = \Delta$$

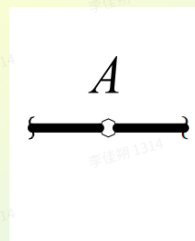
Δ —弹簧变形

光滑连续条件



$$y_{AL} = y_{AR}$$

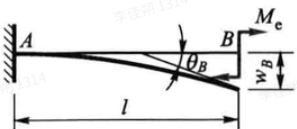
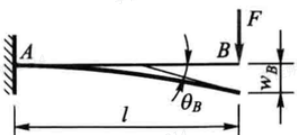
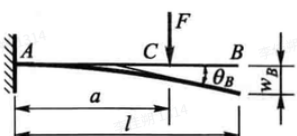
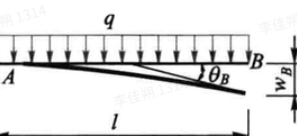
$$\theta_{AL} = \theta_{AR}$$

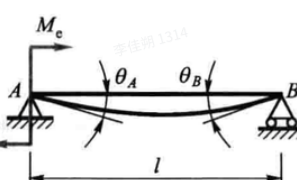
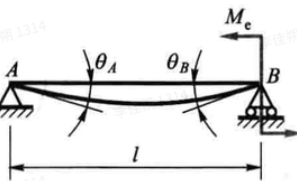
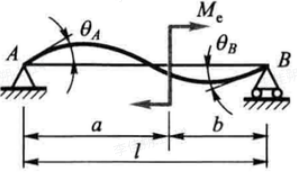


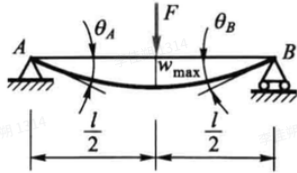
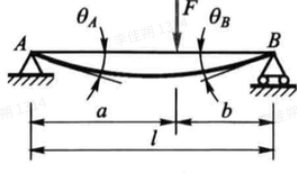
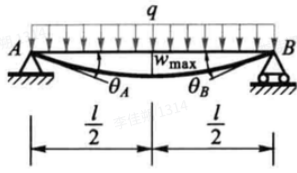
$$y_{AL} = y_{AR}$$

13. 梁在简单载荷作用下的变形表

表 6.1 梁在简单载荷作用下的变形

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
1		$w = -\frac{M_c x^2}{2EI}$	$\theta_B = -\frac{M_c l}{EI}$	$w_B = -\frac{M_c l^2}{2EI}$
2		$w = -\frac{F x^2}{6EI} (3l - x)$	$\theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI}$	$w_B = -\frac{Fl^3}{3EI}$
3		$w = -\frac{F x^2}{6EI} (3a - x) \quad (0 \leq x \leq a)$ $w = -\frac{Fa^2}{6EI} (3x - a) \quad (a \leq x \leq l)$	$\theta_B = -\frac{Fa^2}{2EI}$	$w_B = -\frac{Fa^2}{6EI} (3l - a)$
4		$w = -\frac{qx^2}{24EI} (x^2 - 4lx + 6l^2)$	$\theta_B = -\frac{ql^3}{6EI}$	$w_B = -\frac{ql^4}{8EI}$

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
5		$w = -\frac{M_c x}{6EI} (l - x) (2l - x)$	$\theta_A = -\frac{M_c l}{3EI}$ $\theta_B = \frac{M_c l}{6EI}$	$x = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)l,$ $w_{\max} = -\frac{M_c l^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x = \frac{l}{2}, w_{\frac{l}{2}} = -\frac{M_c l^2}{16EI}$
6		$w = -\frac{M_c x}{6EI} (l^2 - x^2)$	$\theta_A = -\frac{M_c l}{6EI}$ $\theta_B = \frac{M_c l}{3EI}$	$x = \frac{l}{\sqrt{3}},$ $w_{\max} = -\frac{M_c l^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x = \frac{l}{2}, w_{\frac{l}{2}} = -\frac{M_c l^2}{16EI}$
7		$w = \frac{M_c x}{6EI} (l^2 - 3b^2 - x^2) \quad (0 \leq x \leq a)$ $w = \frac{M_c}{6EI} [-x^3 + 3l(x-a)^2 + (l^2 - 3b^2)x] \quad (a \leq x \leq l)$	$\theta_A = \frac{M_c}{6EI} (l^2 - 3b^2)$ $\theta_B = \frac{M_c}{6EI} (l^2 - 3a^2)$	

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
8		$w = -\frac{Fx}{48EI}(3l^2 - 4x^2)$ $(0 \leq x \leq \frac{l}{2})$	$\theta_A = -\theta_B = -\frac{Fl^2}{16EI}$	$w_{\max} = -\frac{Fl^3}{48EI}$
9		$w = -\frac{Fbx}{6EI}(l^2 - x^2 - b^2)$ $(0 \leq x \leq a)$ $w = -\frac{Fb}{6EI} \left[\frac{l}{b}(x-a)^3 + (l^2 - b^2)x - x^3 \right]$ $(a \leq x \leq l)$	$\theta_A = -\frac{Fab(l+b)}{6EI}$ $\theta_B = \frac{Fab(l+a)}{6EI}$	设 $a > b$, 在 $x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$ 处, $w_{\max} = -\frac{Fb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI}$ 在 $x = \frac{l}{2}$ 处, $w_{\frac{l}{2}} = -\frac{Fb(3l^2 - 4b^2)}{48EI}$
10		$w = -\frac{qx}{24EI}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$	$\theta_A = -\theta_B = -\frac{ql^3}{24EI}$	$w_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EI}$

14. 目用叠加法求弯曲变形

梁在若干个载荷共同作用时的挠度或转角，等于在各个载荷单独作用时的挠度或转角的代数和。这就是**计算弯曲变形的叠加原理**。

15. 目简单超静定梁

16. 提高弯曲刚度的一些措施

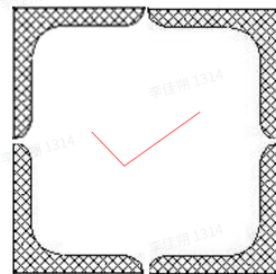
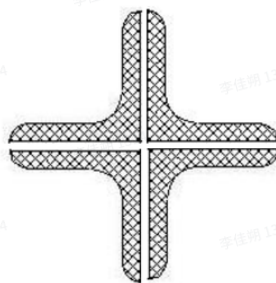
1. 增大梁的抗弯刚度EI

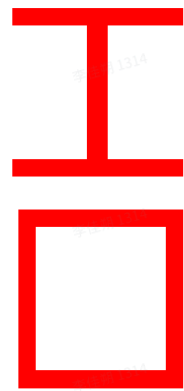
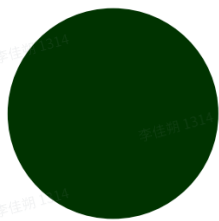
(1) 增大梁的抗弯刚度EI

➤ 增大E

➤ 增大I

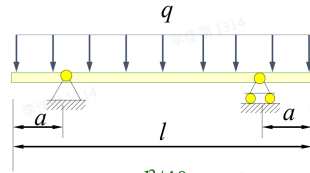
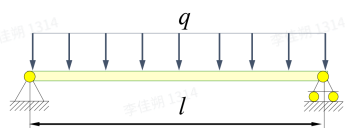
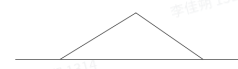
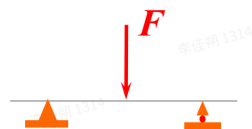
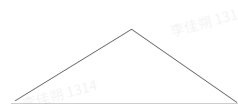
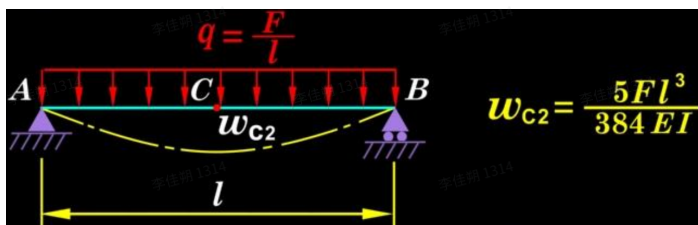
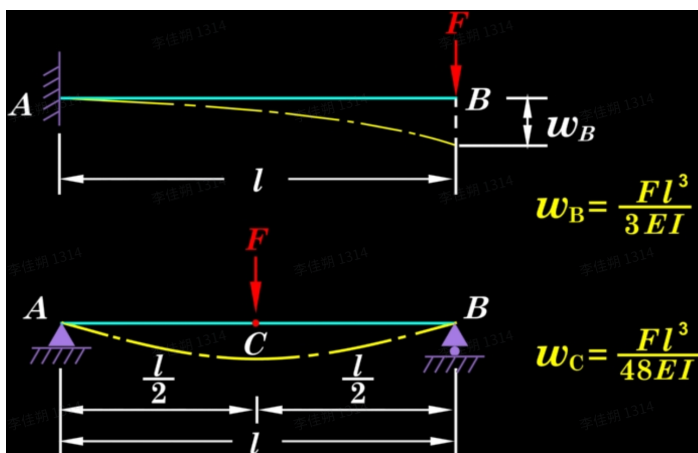
工程中常采用工字型，
框型截面





截面的优化方向

2. 改善结构形式，减少梁的弯矩



3. 采用超静定结构

度和光洁度。对较长的传动轴,有时采用三支承以提高轴的刚度。应该指出,为提高镗刀杆、细长工件和传动轴的弯曲刚度而增加支承,都将使这些杆件由原来的静定梁变为超静定梁。

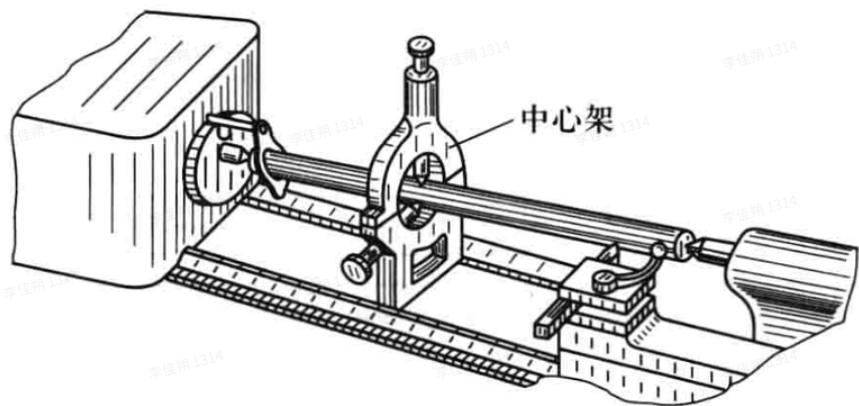


图 6.21

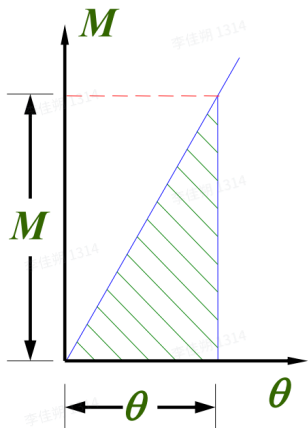
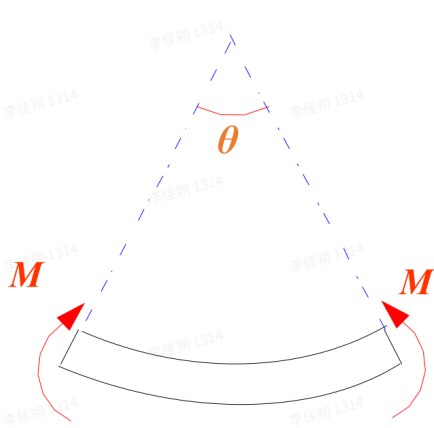
17. 弯曲变形的应变能

纯弯曲

$$V_{\varepsilon} = W = \underbrace{\frac{1}{2} M \theta}_{\text{功}} = \frac{1}{2} M \frac{Ml}{EI_z} = \underbrace{\frac{M^2 l}{2EI_z}}_{\text{力}} = \underbrace{\frac{EI_z}{2l} \theta^2}_{\text{变形}}$$

横力弯曲

$$V_{\varepsilon} = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

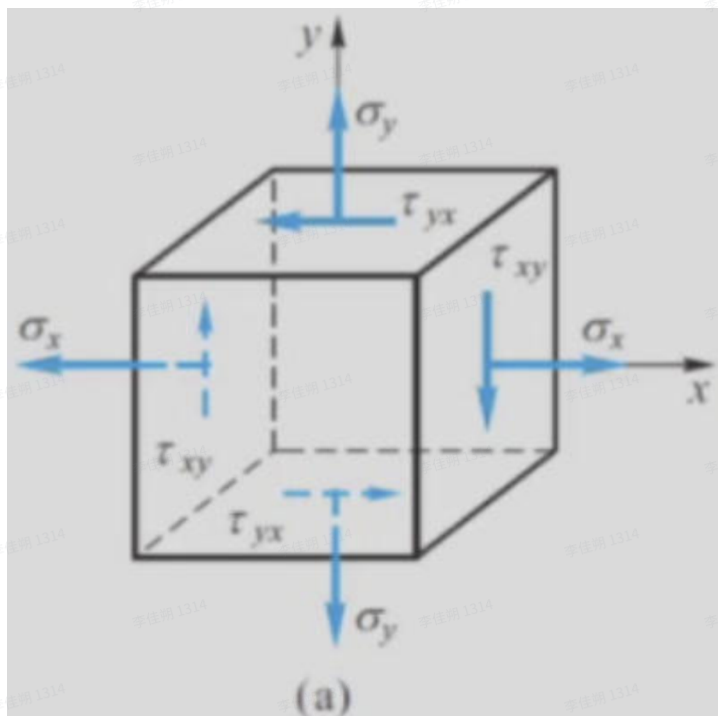


强度理论

1. 应力状态

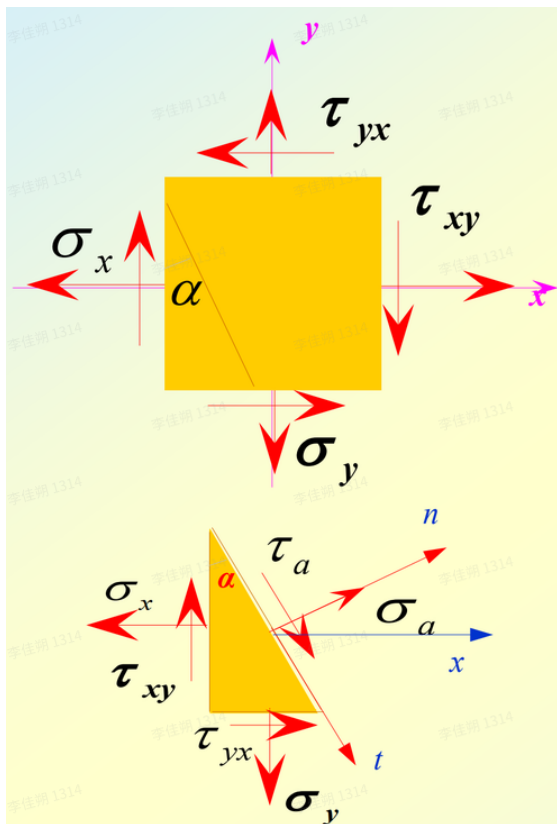
- 要先求主应力才能知道应力状态
- (1) 单向应力状态：三个主应力中只有一个不为零
 - (2) 平面应力状态：三个主应力中有两个不为零
 - (3) 空间应力状态：三个主应力都不等于零

平面应力状态和空间应力状态统称为复杂应力状态



平面应力状态

2. 应力与角度正负

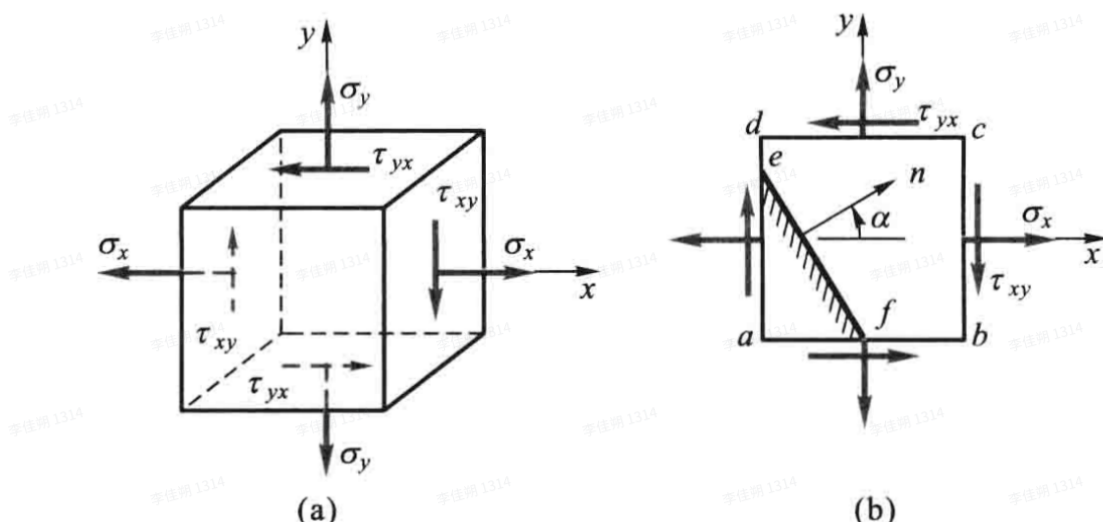


正应力：拉为正；压为负

切应力：使微元顺时针方向转动为正；反之为负。

α 角：由 x 轴正向逆时针转到斜截面外法线时为正；反之为负。

按照上述符号规则,在图 7.5a 中, σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 皆为正,而 τ_{yx} 为负。



3. 二向应力状态的实例(含内压的薄壁圆筒)

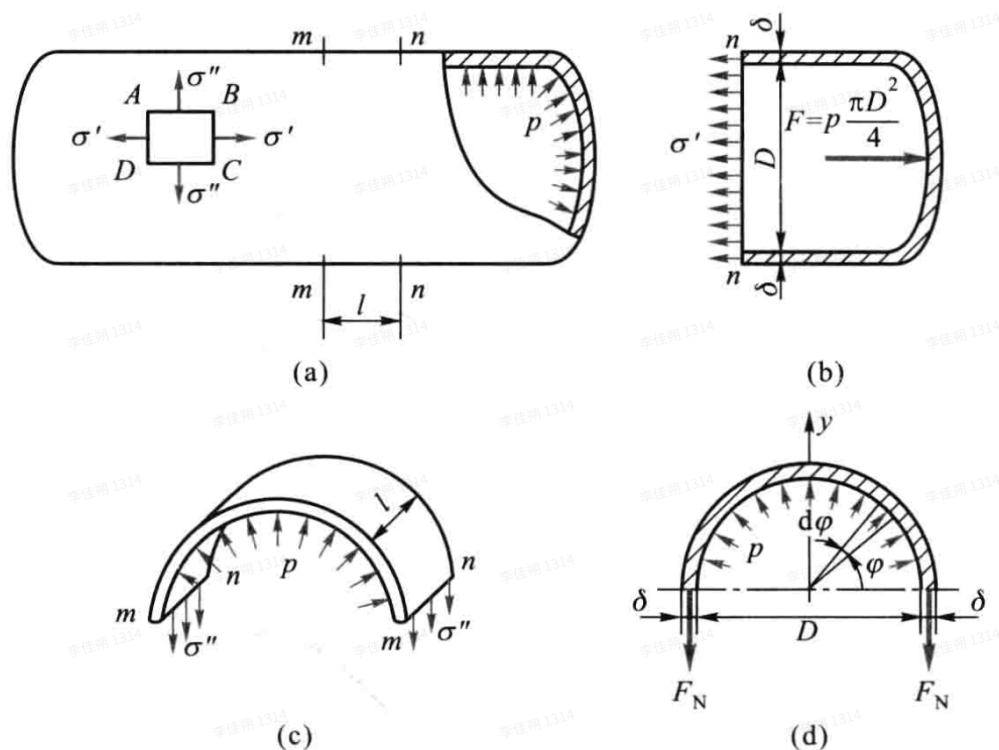


图 7.2

作为二向应力状态的实例,我们研究锅炉或其他圆筒形容器的应力状态(图 7.2)。当这类圆筒的壁厚 δ 远小于它的内径 D 时(譬如, $\delta < \frac{D}{20}$),称为薄壁圆筒。若封闭的薄壁圆筒所受内压为 p ,则沿圆筒轴线作用于筒底的总压力为 F (图 7.2b),且

$$F = p \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

在 F 力作用下,圆筒横截面上应力 σ' 的计算,属于第二章的轴向拉伸问题。因为薄壁圆筒的横截面面积是 $A = \pi D \delta$,故有

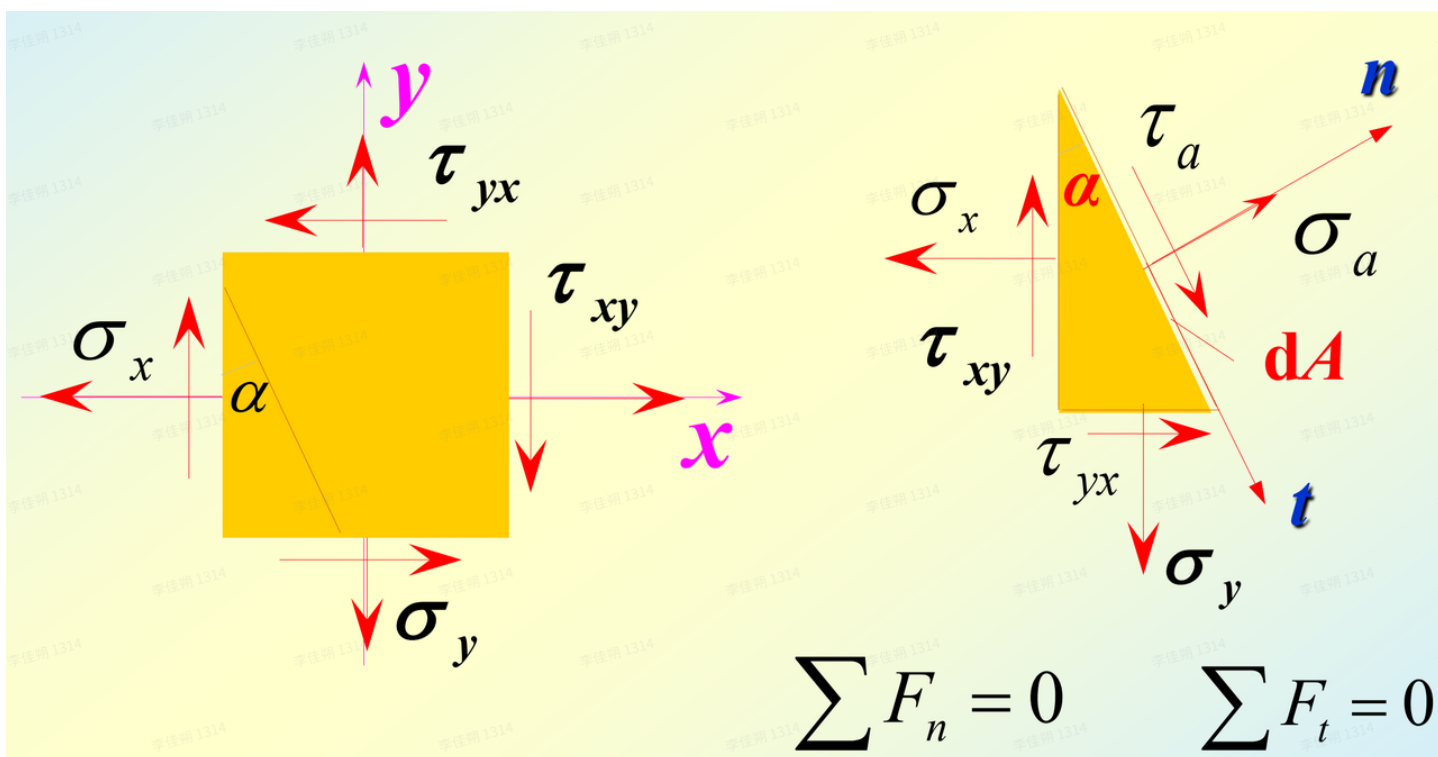
$$\sigma' = \frac{F}{A} = \frac{p \cdot \frac{\pi D^2}{4}}{\pi D \delta} = \frac{pD}{4\delta} \quad (7.1)$$

$$\sigma'' = \frac{pD}{2\delta} \quad (7.2)$$

从公式(7.1)和公式(7.2)看出,纵向截面上的应力 σ'' 是横截面上应力 σ' 的 2 倍。

σ' 作用的截面就是直杆轴向拉伸的横截面。这类截面上没有切应力。又因内压是轴对称载荷,所以在 σ'' 作用的纵向截面上也没有切应力。这样,通过壁内任意点的纵横两截面皆为主平面, σ'' 和 σ' 皆为主应力。此外,在单元体 $ABCD$ 的第三个方向上,有作用于内壁的内压 p 和作用于外壁的大气压,它们都远小于 σ' 和 σ'' ,可以认为等于零,于是得到了二向应力状态。

4. 任意斜截面的应力(含解析法)



列平衡方程

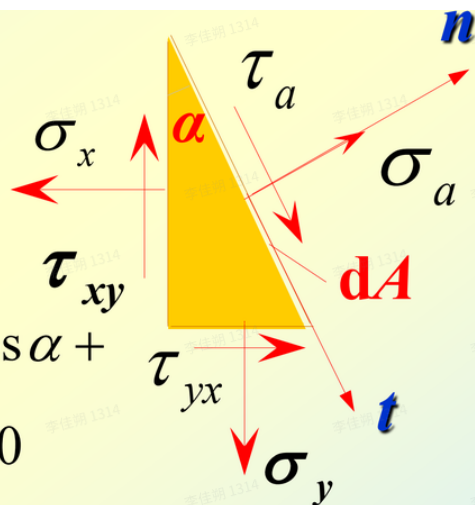
$$\sum F_n = 0 \longrightarrow$$

$$\sigma_\alpha dA + \tau_{xy} (dA \cos \alpha) \sin \alpha - \sigma_x (dA \cos \alpha) \cos \alpha + \tau_{yx} (dA \sin \alpha) \cos \alpha - \sigma_y (dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_t = 0 \longrightarrow$$

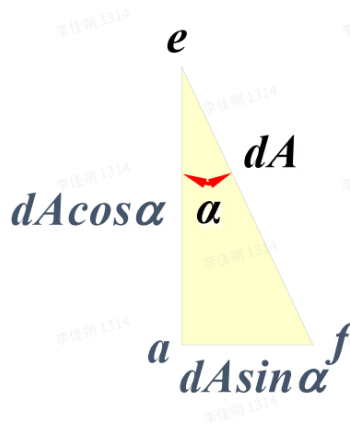
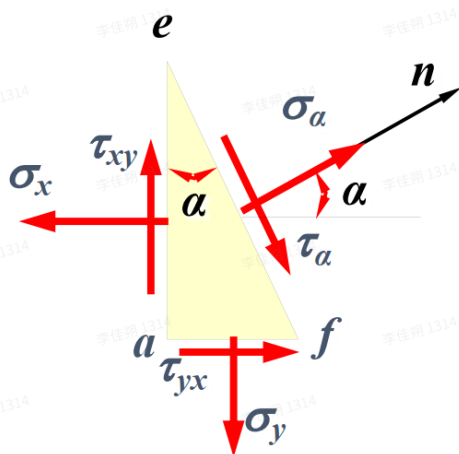
$$\tau_\alpha dA - \tau_{xy} (dA \cos \alpha) \cos \alpha - \sigma_x (dA \cos \alpha) \sin \alpha + \tau_{yx} (dA \sin \alpha) \sin \alpha + \sigma_y (dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

注意：这里 τ_{xy} 与 τ_{yx} 已经带了方向。



利用三角函数公式

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha \end{array} \right.$$



$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

不难看出 $\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90^{\circ}} = \sigma_x + \sigma_y$ $\tau_{\alpha} + \tau_{\alpha+90^{\circ}} = 0$

即两相互垂直面上的正应力之和保持一个常数

5. 最大正应力及方位

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

最大正应力的方位

令 $\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2 \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right] = 0$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 \\ \alpha_0 + 90^{\circ} \end{cases}$$

α_0 和 α_0+90° 确定两个互相垂直的平面，一个是最大正应力所在的平面，另一个是最小正应力所在的平面。

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

约定 $|\alpha_0| < 45^\circ$ ，即 α_0 取值在 $\pm 45^\circ$ 范围内，确定主应力方向的具体规则如下：

- 当 $\sigma_x > \sigma_y$ 时， α_0 是 σ_x 与 $\sigma_{\max}$ 之间的夹角；
- 当 $\sigma_x < \sigma_y$ 时， α_0 是 σ_x 与 $\sigma_{\min}$ 之间的夹角；
- 当 $\sigma_x = \sigma_y$ 时， $\alpha_0 = 45^\circ$ ，主应力的方向可由单元体上切应力情况直观判断出来

6. 最大切应力及方位

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

注意：正应力最大时

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\alpha_0} = 0$$

α_0 和 $\alpha_0 + 90^\circ$ 所确定的正应力所在的两个互相垂直的平面，切应力为0，符合主应力的定义。

最大切应力的方位

$$\text{令 } \frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 2 \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \right] = 0$$

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_1 + 90^\circ \end{cases}$$

α_1 和 $\alpha_1 + 90^\circ$ 确定两个互相垂直的平面，一个是最大切应力所在的平面，另一个是最小切应力所在的平面。

最大切应力

将 α_1 和 α_1+90° 代入公式

得到 $\tau_{\max}$ 和 $\tau_{\min}$

$$\begin{cases} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{cases} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

比较 $\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ 和 $\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$

可见 $\tan 2\alpha_0 = -\frac{1}{\tan 2\alpha_1}$ $2\alpha_1 = 2\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$, $\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\pi}{4}$

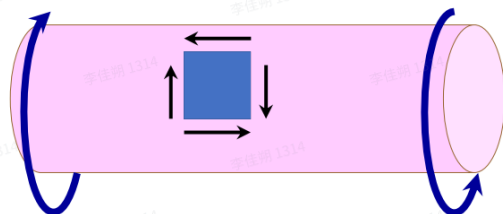
7. 平面纯剪切状态



可以通过将正方形切为两个直角三角形来判断 σ 的正负

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \rightarrow -\infty$$

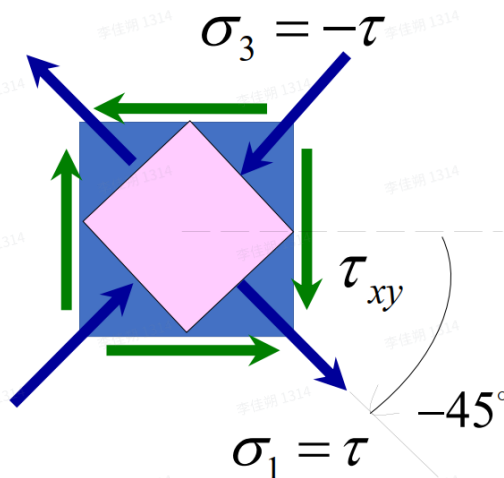
$$\alpha_0 = -45^\circ \text{ 或 } -135^\circ$$



$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \tau_{xy}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3 = -\tau_{xy}$$



此现象称为纯剪切

8. 应力圆(莫尔圆)



此处表明 $\sigma_x + \sigma_y$ 是一个不变量, 或者说垂直的切应力之和为不变量

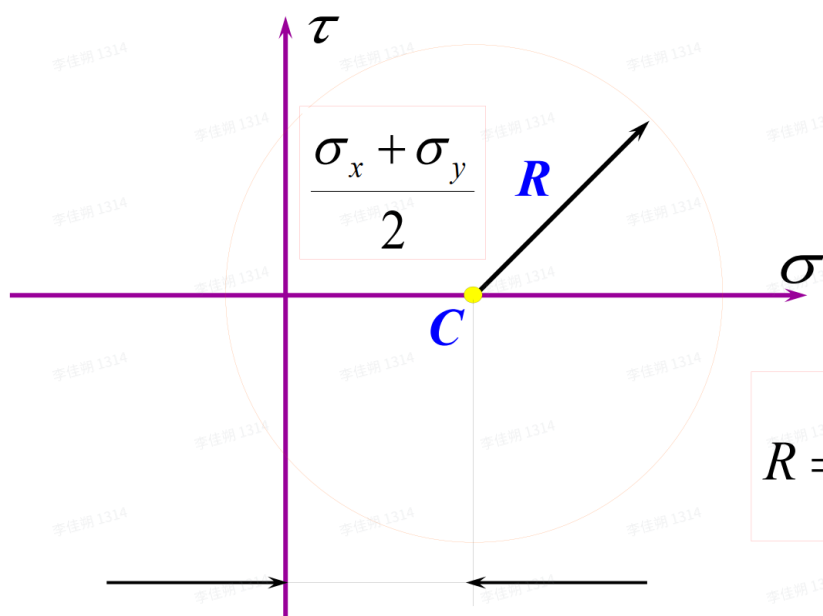
圆心的坐标

$$C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$$

圆的半径

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$



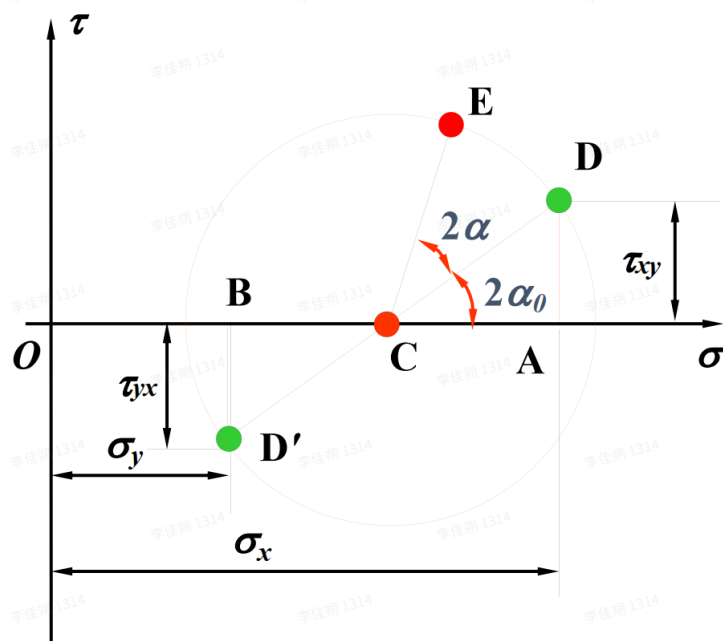
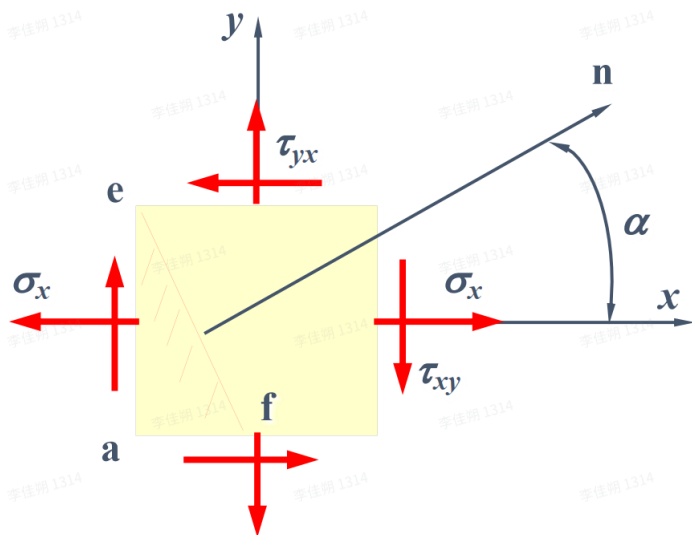
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

1. 求单元体上任一截面的应力

斜截面的应力($\sigma_\alpha, \tau_\alpha$)



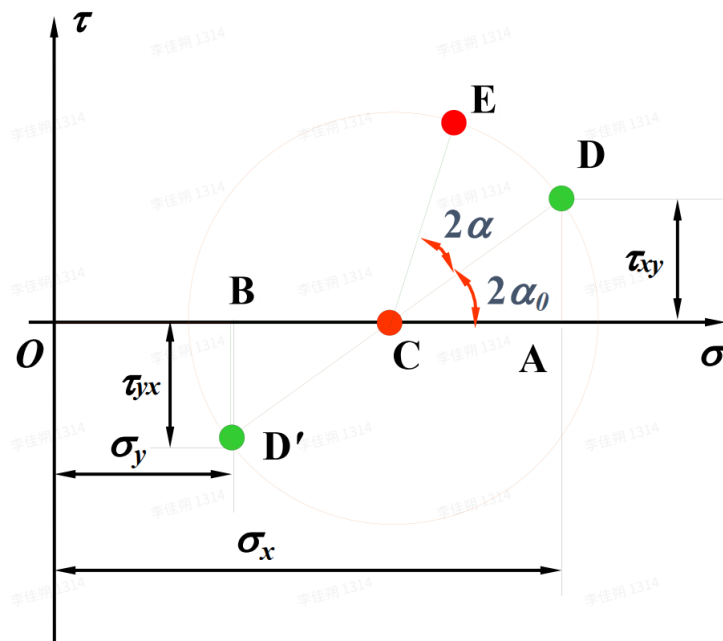
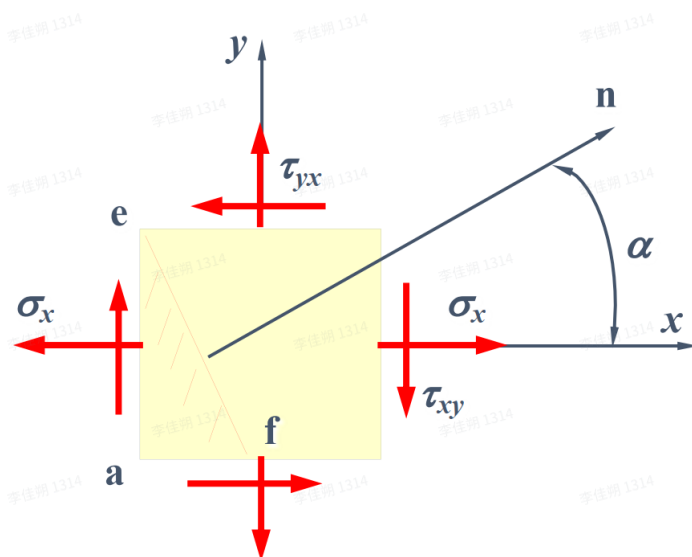
应力圆E点坐标($\sigma_\alpha, \tau_\alpha$)



单元体上角度 α



应力圆上CE与CD夹角 2α , 且转向一致



2. 求主应力

(2) 求主应力数值和主平面位置

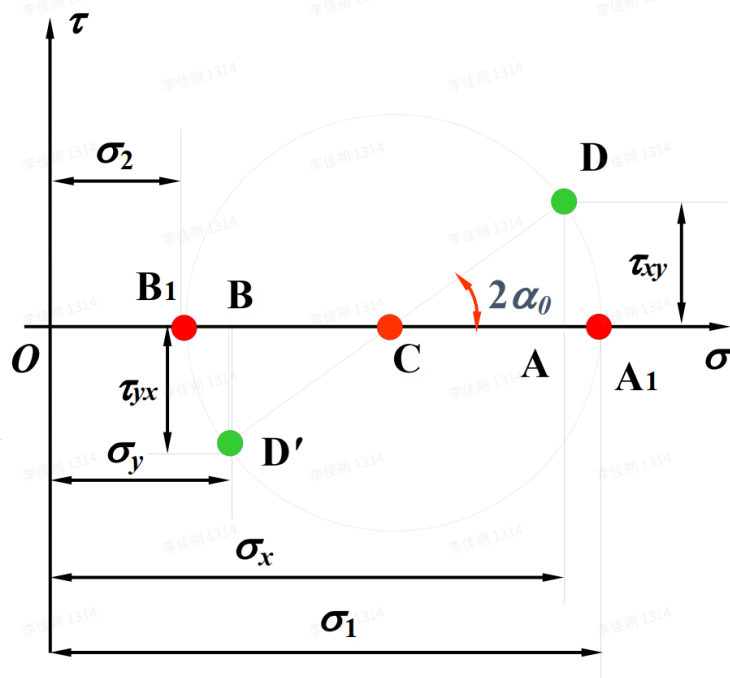
主应力数值

A_1 和 B_1 两点为与主平面对应的点，其横坐标为主应力 σ_1, σ_2 。

$$\overline{OB_1} = \overline{OC} - \overline{CB_1}$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \sigma_{\min} = \sigma_2$$



二向应力状态分析——图解法

应力圆的应用

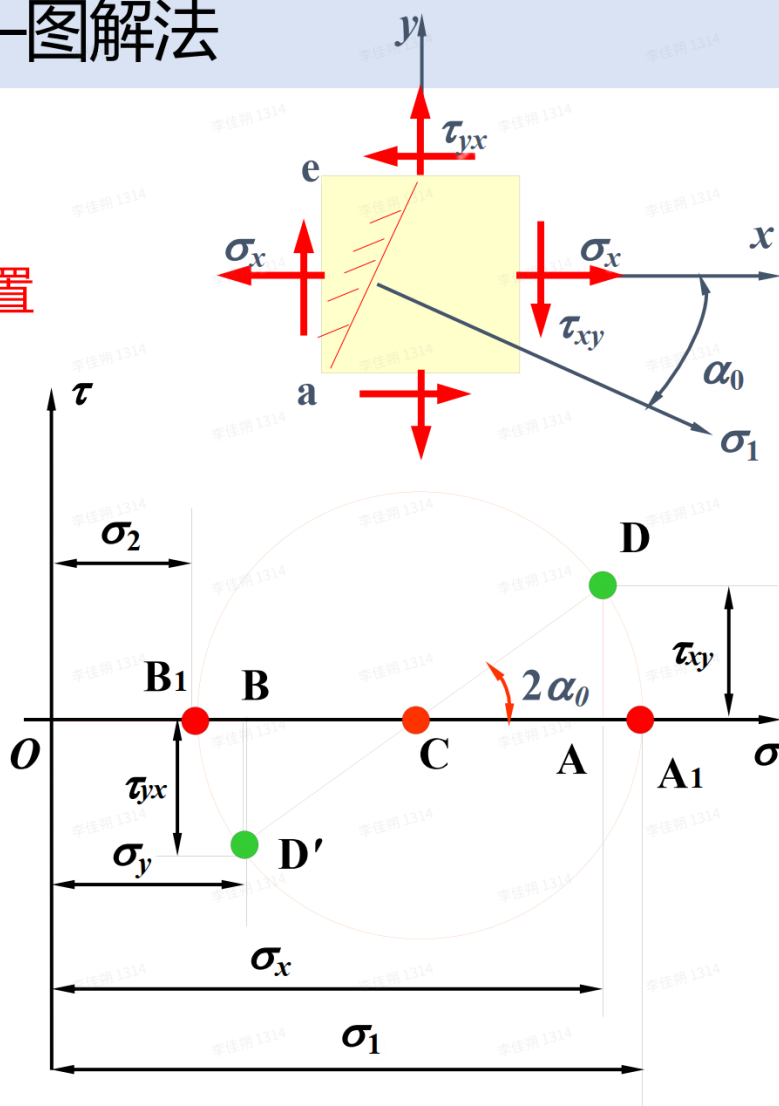
(2) 求主应力数值和主平面位置

主平面位置

由CD顺时针转 $2\alpha_0$ 到 CA_1
所以单元体上从 x 轴顺时针转 α_0 （负值）即到 σ_1
对应的主平面的外法线

$$\tan(-2\alpha_0) = \frac{DA}{CA} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



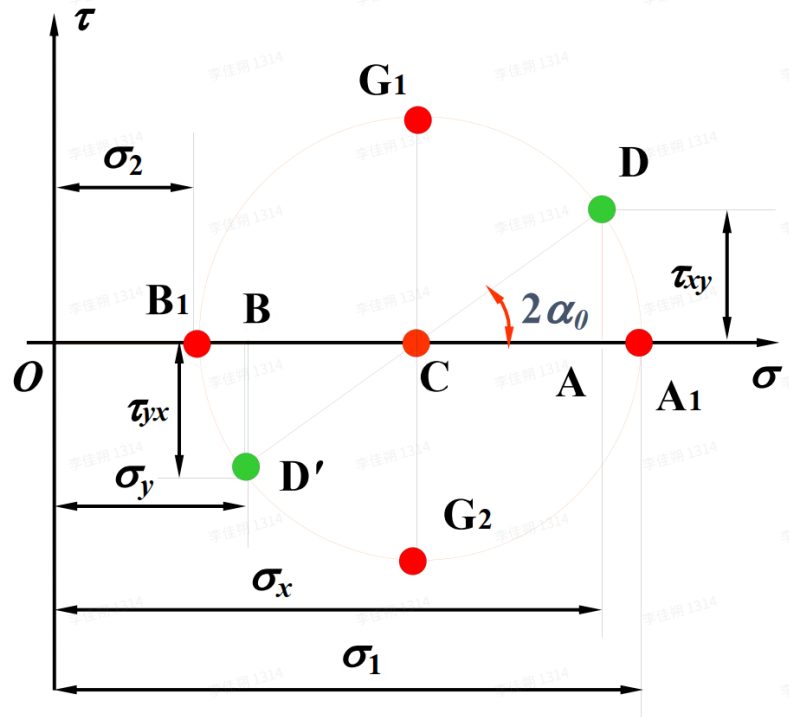
3. 求最大切应力

(3) 求最大切应力

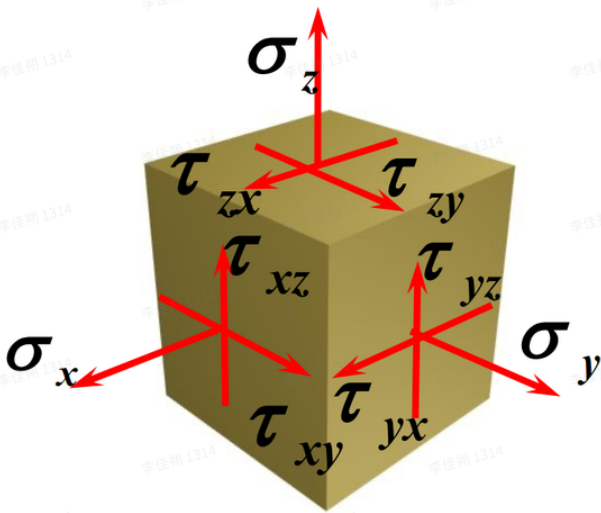
G_1 和 G_2 两点的纵坐标分别代表最大和最小切应力

最大最小切应力等于应力圆的半径

$$\begin{cases} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{cases} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$



9. 广义胡克定律

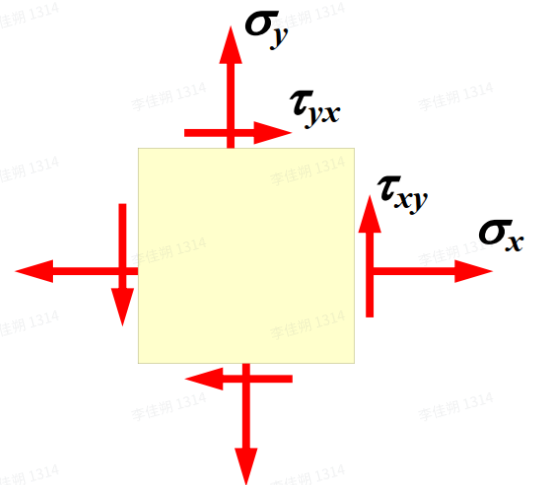
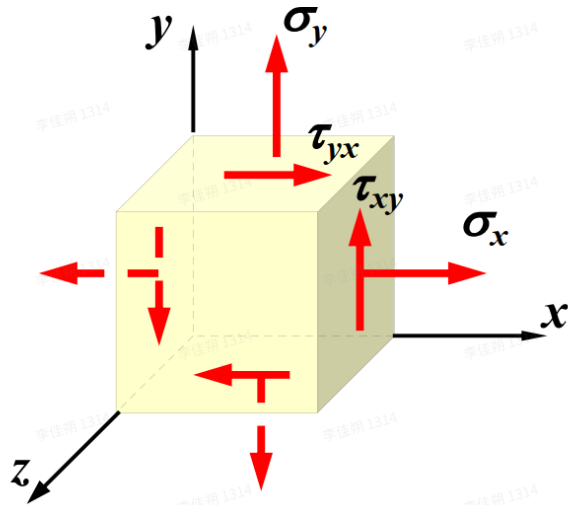


$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

材料为各向同性，且变形处于线弹性范围。

对于平面应力状态 (假设 $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$)



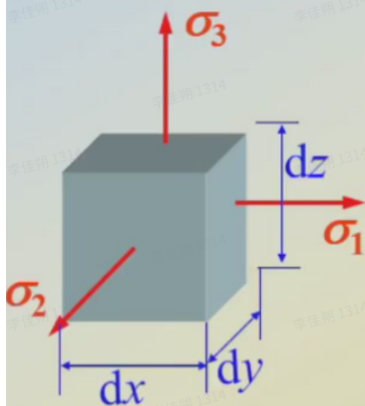
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\mu}{E} (\sigma_y + \sigma_x)$$

10. 体积应变

体应变的定义



$$V = dx dy dz$$

$$V_1 = (1 + \varepsilon_1) dx (1 + \varepsilon_2) dy (1 + \varepsilon_3) dz$$

$$\approx (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) dx dy dz$$

体应变 (volume strain): 应变之和为不变量
无论坐标如何改变
体应变不变

$$\theta = \frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

只有切应力作用情形,
是否会产生体应变?

此时不产生体改变,
但会发生形状改变!

不会, 因为纯剪切状态下, 主应变之和
等于零 (平面应力状态下, $\sigma_1 = -\tau$, $\sigma_2 = \tau$)。

体应变:

$$\theta = \frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

利用广义胡克定律, 得到各向同性材料体应变与应力分量间的关系:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

特别地: $\mu = 0.5$: $\theta = 0$ 称为不可压缩材料
各向同性材料, 体应变与切应力无关!

$$K = \frac{\sigma_m}{\theta} = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

体积模量
bulk modulus

11. 复杂状态下的应变能密度

应变能密度 $v_\varepsilon = v_v + v_d$

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3)]$$

体积改变能密度

$$v_v = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

单位均为 J/m^3

畸变能密度

$$v_d = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

12. 四个强度理论

13. 相当应力

把各种强度理论的强度条件写成统一形式

$$\sigma_r \leq [\sigma]$$

σ_r 称为复杂应力状态的相当应力.

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

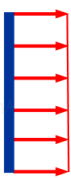
14. 目一些例题

15. 目主应变与线应变

组合变形(前提：线弹性小变形)

1. 拉压和弯曲组合

横截面上的应力计算

$$\sigma_t = \frac{F_N}{A}$$


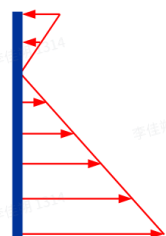
σ_t

$$\sigma_B = \frac{M_{\max}}{W}$$

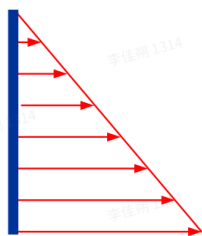

σ_B

$$\sigma_{t,\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{\max}}{W}$$

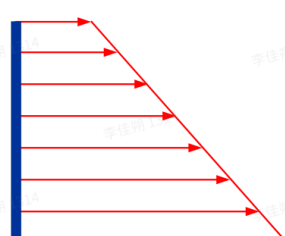
叠加后，横截面上应力的三种分布形式（中性轴上移）



$$\sigma_t < \sigma_B$$



$$\sigma_t = \sigma_B$$



$$\sigma_t > \sigma_B$$

注意：当材料的许用拉应力和许用压应力不相等时，应分别校核杆件的拉、压强度条件。

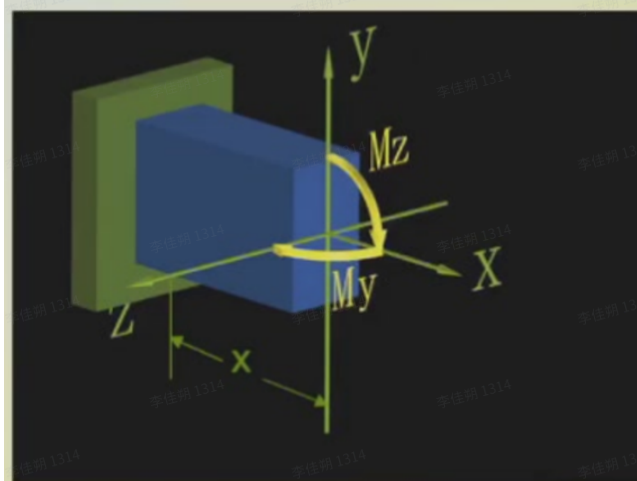
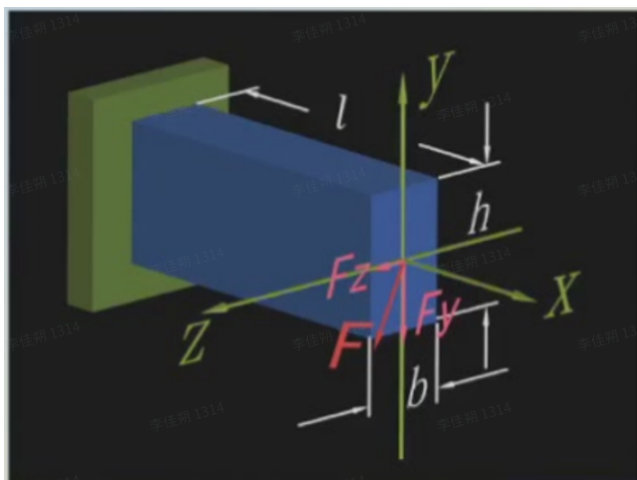
7

☆☆☆ 特别指出 ☆☆☆

对于弯曲刚度 EI 较小的杆，在压缩与弯曲组合变形下，轴向压力引起的附加弯矩较大，且附加弯矩的转向与横向力引起的弯矩同向，此时叠加原理将不再适用。

2. 斜弯曲

1. 受力分析



$$F_y = -F \cos \theta$$

$$F_z = F \sin \theta$$

(1) 内力分析

坐标为x的任意截面上

$$M_z = F_y(l - x) = F(x - l) \cos \theta$$

$$M_y = F_z(x - l) = F(x - l) \sin \theta$$

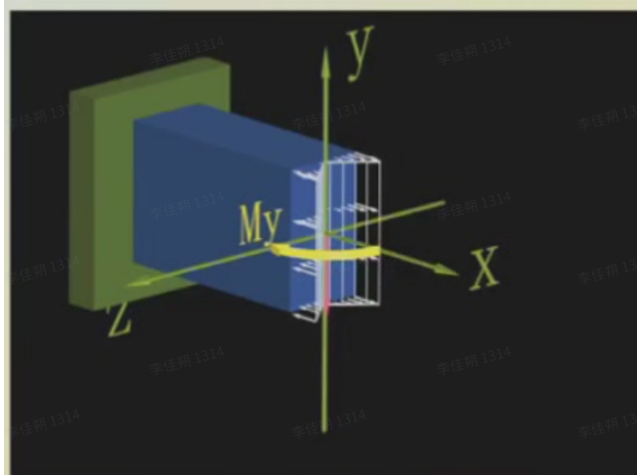
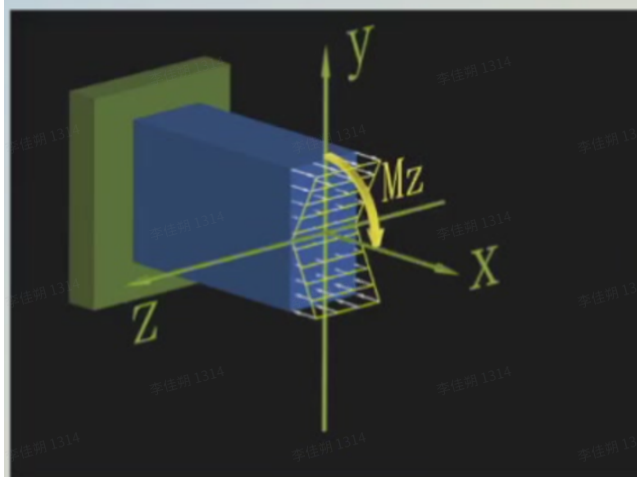
固定端截面

$$M_{z \max} = -Fl \cos \theta$$

$$M_{y \max} = -Fl \sin \theta$$

斜 弯 曲

角点处同时拉或压时应力最大

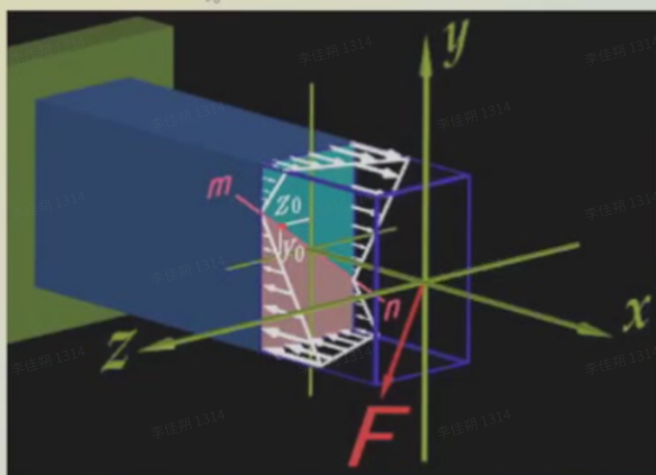


(2) 应力分析

截面上任意一点 (y, z) 的正应力

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$= F(l - x) \left(\frac{y \cos \theta}{I_z} - \frac{z \sin \theta}{I_y} \right)$$



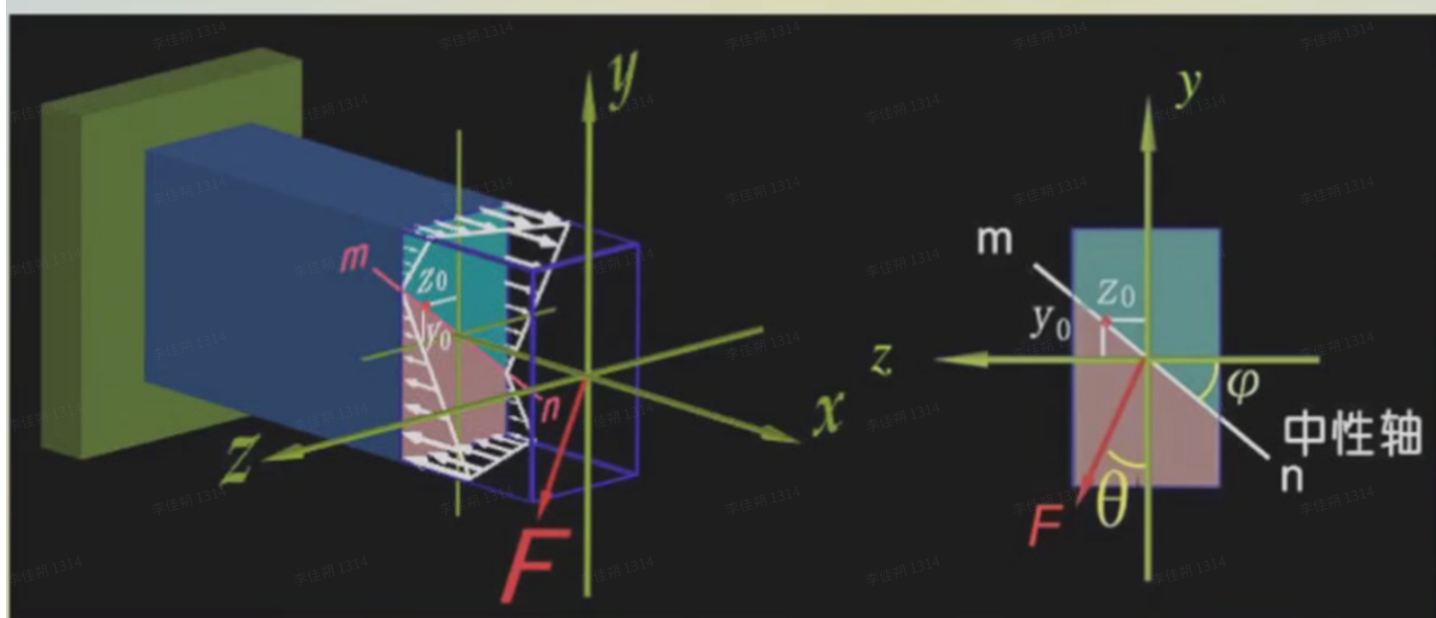
2. 中性轴方程

中性轴上

$$\sigma = F(l-x)\left(\frac{y_0 \cos \theta}{I_z} - \frac{z_0 \sin \theta}{I_y}\right) = 0$$

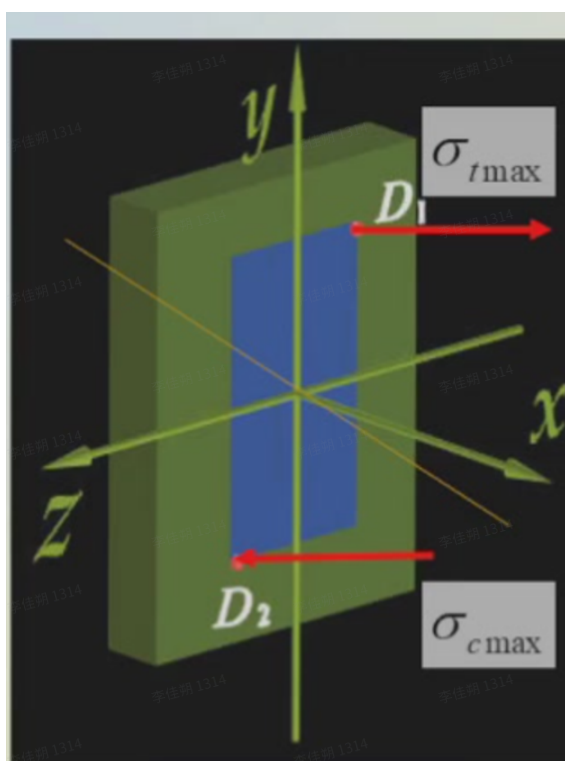
中性轴方程

$$\frac{y_0 \cos \theta}{I_z} - \frac{z_0 \sin \theta}{I_y} = 0$$

$$\tan \varphi = \frac{y_0}{z_0} = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$


3. 强度条件

固定端截面



$$\sigma_{t\max} = \frac{|M_y|_{\max}}{W_y} + \frac{|M_z|_{\max}}{W_z}$$

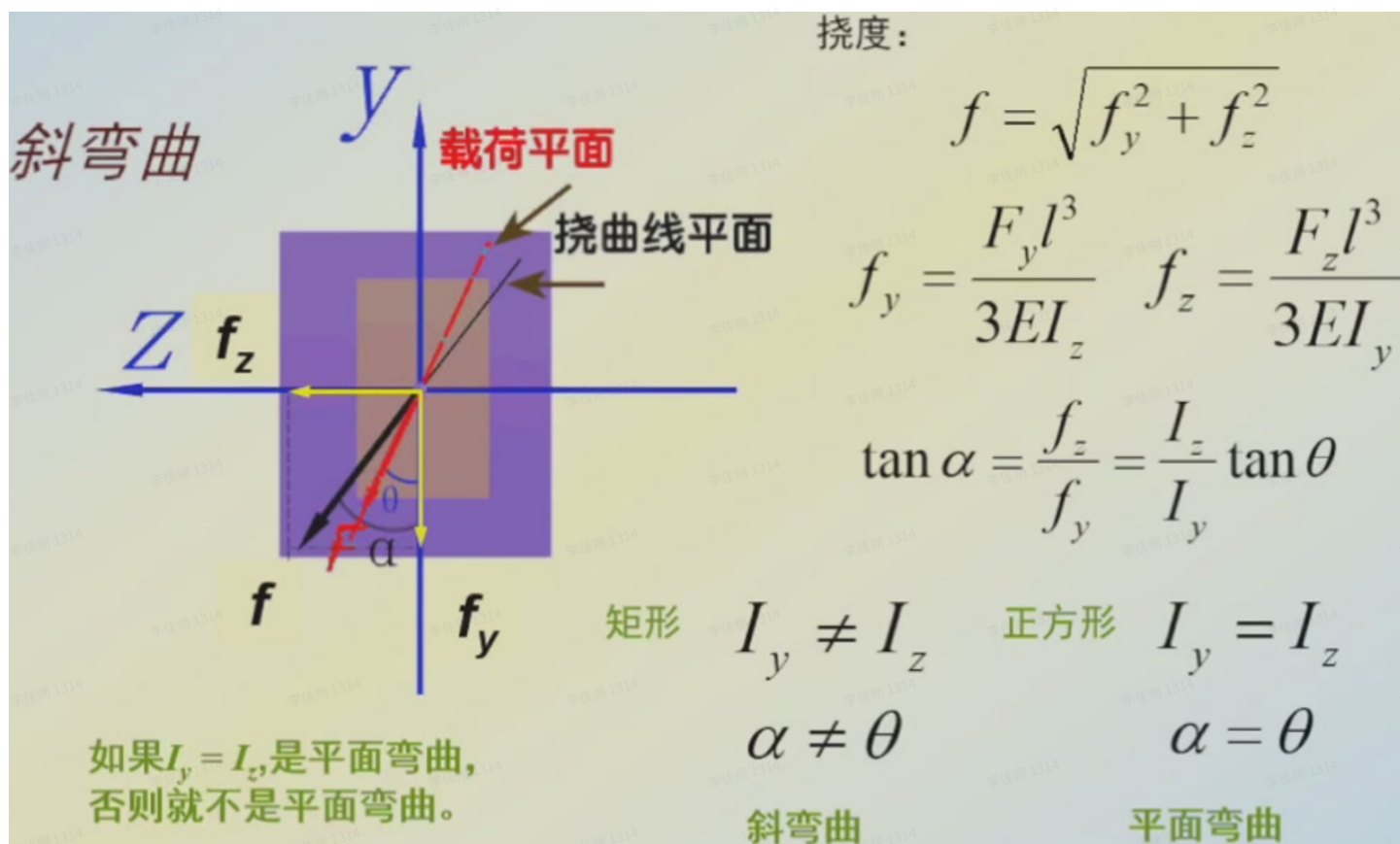
$$\sigma_{c\max} = -\frac{|M_y|_{\max}}{W_y} - \frac{|M_z|_{\max}}{W_z}$$

强度条件:

D_1 点: $\sigma_{t,\max} \leq [\sigma_t]$

D_2 点: $\sigma_{c,\max} \leq [\sigma_c]$

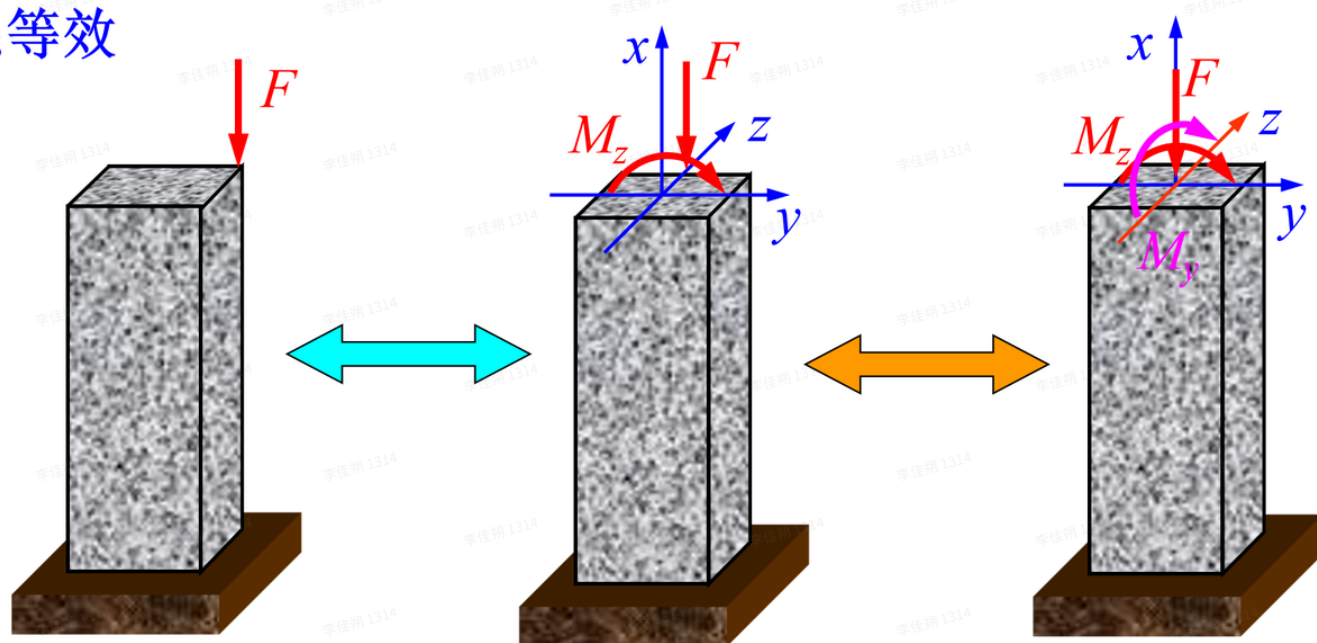
4. 挠曲线平面



3. 偏心压缩

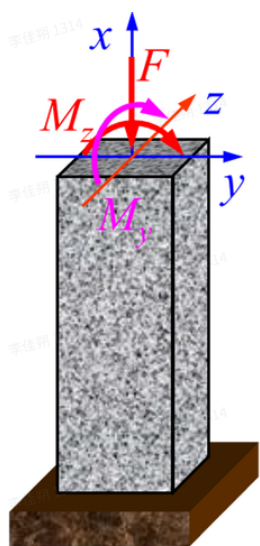
1. 应力分析

力系等效



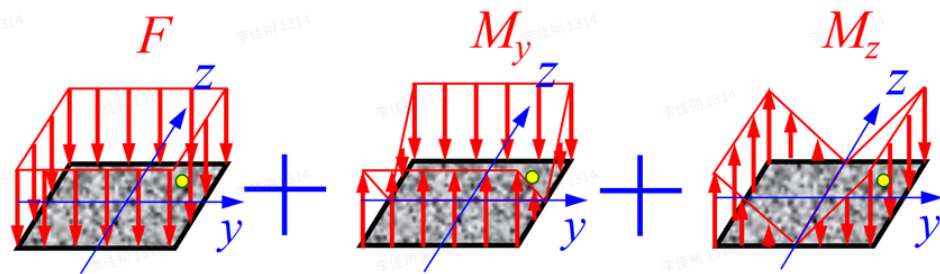
y 和 z 轴为形心主惯性轴

(1) 应力分析



$$M_z = F \times y_F$$

$$M_y = F \times z_F$$



$$\sigma_{x,F} = -\frac{F}{A}$$

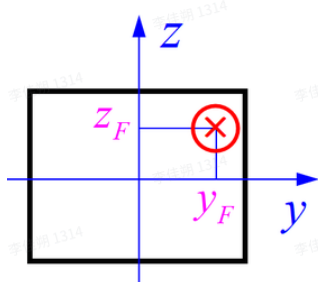
$$\sigma_{x,M_y} = -\frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma_{x,M_z} = -\frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma_x = -\left(\frac{F}{A} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \right)$$

负号是由于当 $z>0$ ($y>0$)时， M_y (M_z)使柱子受压，即 σ 为负，但此时 M_y (M_z)、 z (y)、 I_y (I_z)均为正值，因此需要加负号。

$$\sigma_x = -\left(\frac{F}{A} + \frac{F y_F \times y}{I_z} + \frac{F z_F \times z}{I_y} \right)$$



2. 中性轴方程

(2) 中性轴方程

$$\sigma_x = -\left(\frac{F}{A} + \frac{F y_F \times y}{I_z} + \frac{F z_F \times z}{I_y} \right)$$

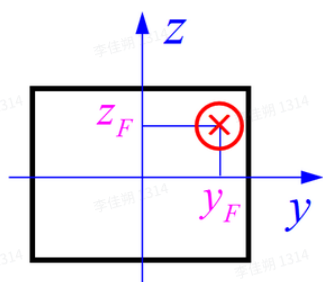
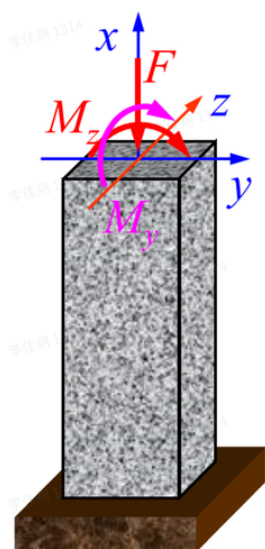
$$\sigma_x = -\left(\frac{F}{A} + \frac{F y_F \times y_0}{I_z} + \frac{F z_F \times z_0}{I_y} \right) = 0$$

$$\frac{F}{A} + \frac{F y_F y_0}{A i_z^2} + \frac{F z_F z_0}{A i_y^2} = 0$$

$$\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_0}{i_z^2} + \frac{z_F z_0}{i_y^2} \right) = 0$$

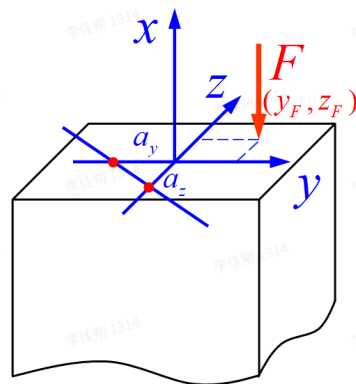
$$1 + \frac{y_F y_0}{i_z^2} + \frac{z_F z_0}{i_y^2} = 0$$

中性轴方程



讨论:

$$1 + \frac{y_F y_0}{i_z^2} + \frac{z_F z_0}{i_y^2} = 0 \xrightarrow[\text{截距方程}]{\text{改写成}} \frac{y_0}{-\frac{i_z^2}{y_F}} + \frac{z_0}{-\frac{i_y^2}{z_F}} = 1$$



1. 力的作用点与中性轴
永远在截面形心的两侧。

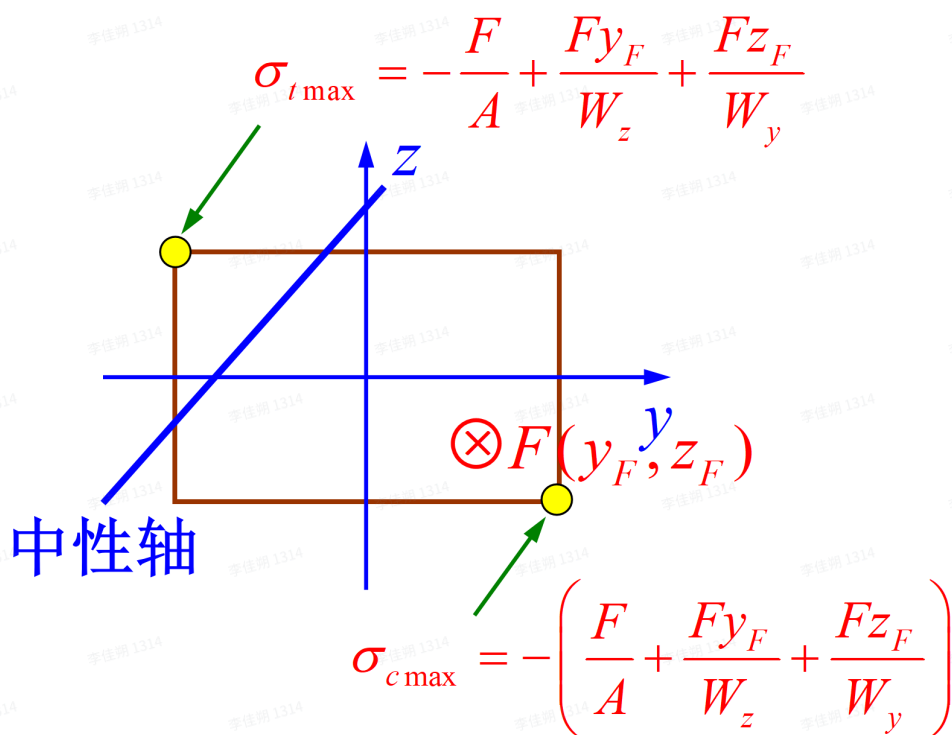
$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}, a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}$$

2. 力的作用点向截面形心方向移, 即 $y_F \downarrow, z_F \downarrow$, 则 $|a_y| \uparrow, |a_z| \uparrow$, 则中性轴向外移。

当力的作用点通过截面形心, 有 $y_F=0, z_F=0$, 此时中性轴在无穷远处。

3. 危险点

危险点 (距中性轴最远的点)



4. 截面核心

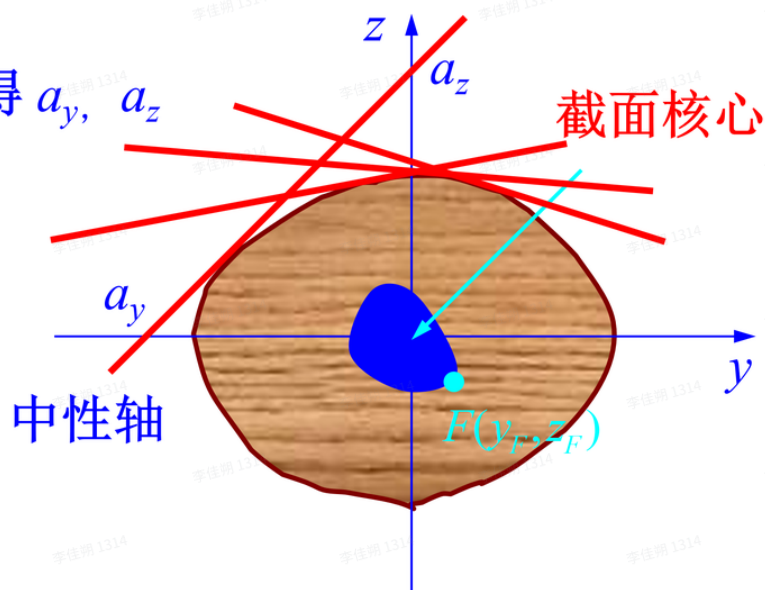
截面核心的确定:

找到截面上最远的中性轴, 得 a_y, a_z

$$\frac{y_0}{a_y} + \frac{z_0}{a_z} = 1$$

$$\frac{\frac{i_z^2}{y_F}}{a_y} + \frac{\frac{i_y^2}{z_F}}{a_z} = 1$$

$$y_F = -\frac{i_z^2}{a_y}, \quad z_F = -\frac{i_y^2}{a_z}$$



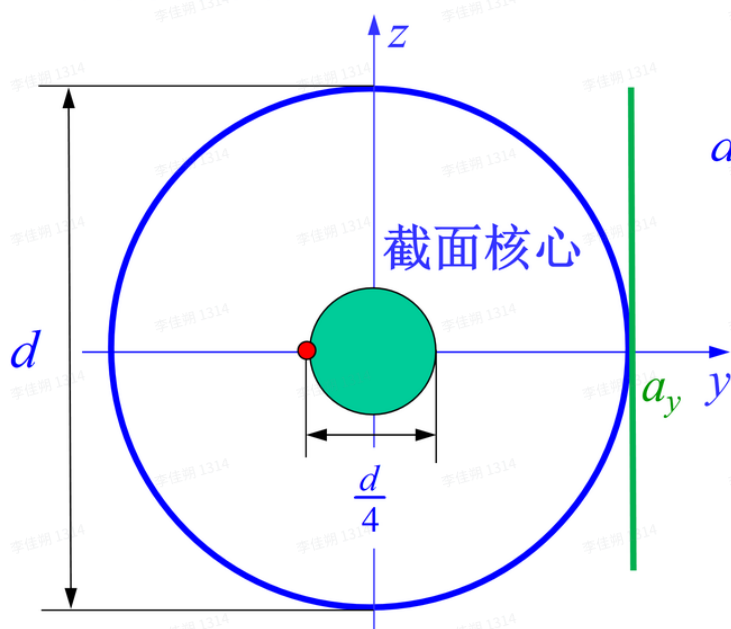
可求得对应该中性轴的力 F 的一个作用点 (y_F, z_F)

中性轴与边界相切或过边界的角点

几种截面的截面核心

1. 圆形截面

1. 圆形截面



几种截面的截面核心

$$\frac{y_0}{a_y} + \frac{z_0}{a_z} = 1$$

$$y_F = -\frac{i_z^2}{a_y}$$

$$z_F = -\frac{i_y^2}{a_z}$$

$$a_y = d/2$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{64}\pi d^4}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{1}{16}d^2$$

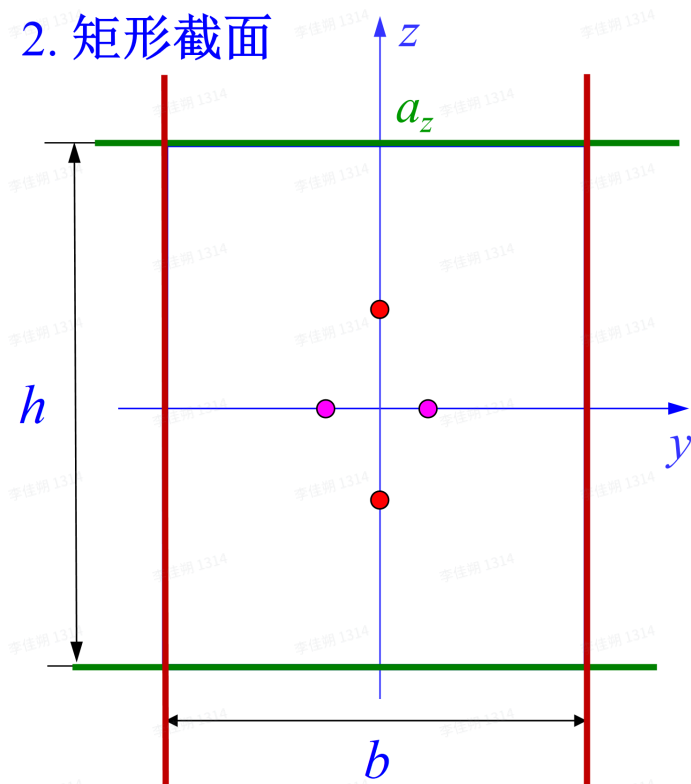
$$y_F = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{d^2/16}{d/2} = -\frac{d}{8}$$

$$a_z \rightarrow \infty$$

$$z_F = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{d^2/16}{\infty} = 0$$

2. 矩形截面

2. 矩形截面



$$y_F = -\frac{i_z^2}{a_y}, \quad z_F = -\frac{i_y^2}{a_z}$$

$$a_z = h/2, \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{bh} = \frac{1}{12}h^2$$

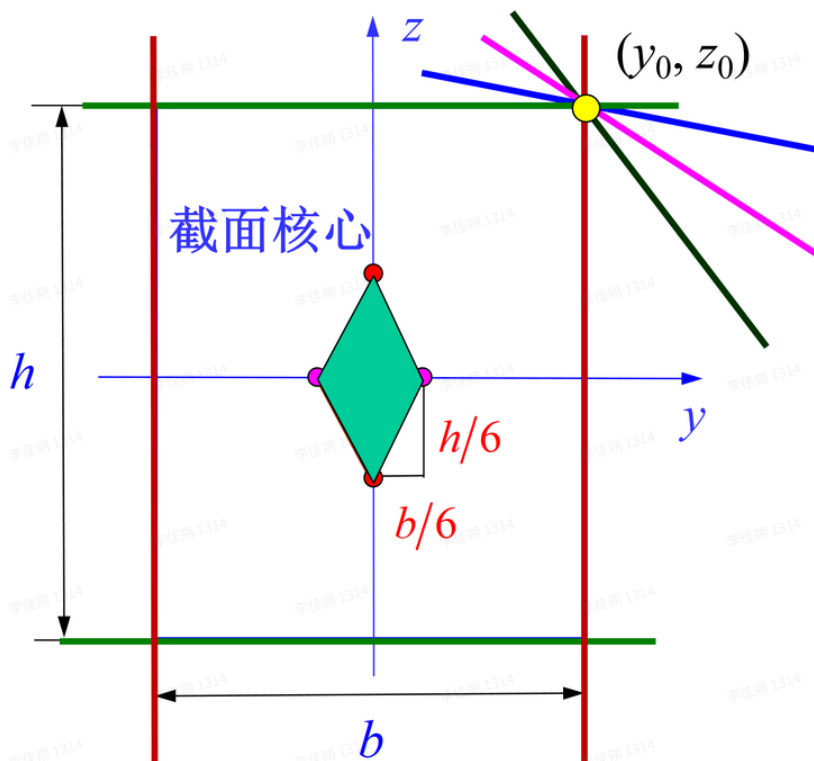
$$z_F = -\frac{i_y^2}{a_z}, \quad z_F = -\frac{h^2/12}{h/2} = -\frac{h}{6}$$

$$a_y \rightarrow \infty$$

$$y_F = -\frac{i_z^2}{a_y}$$

$$y_F = -\frac{b^2/12}{\infty} = 0$$

$$y_F = -\frac{b}{6}, \quad z_F = 0$$



利用中性轴方程:

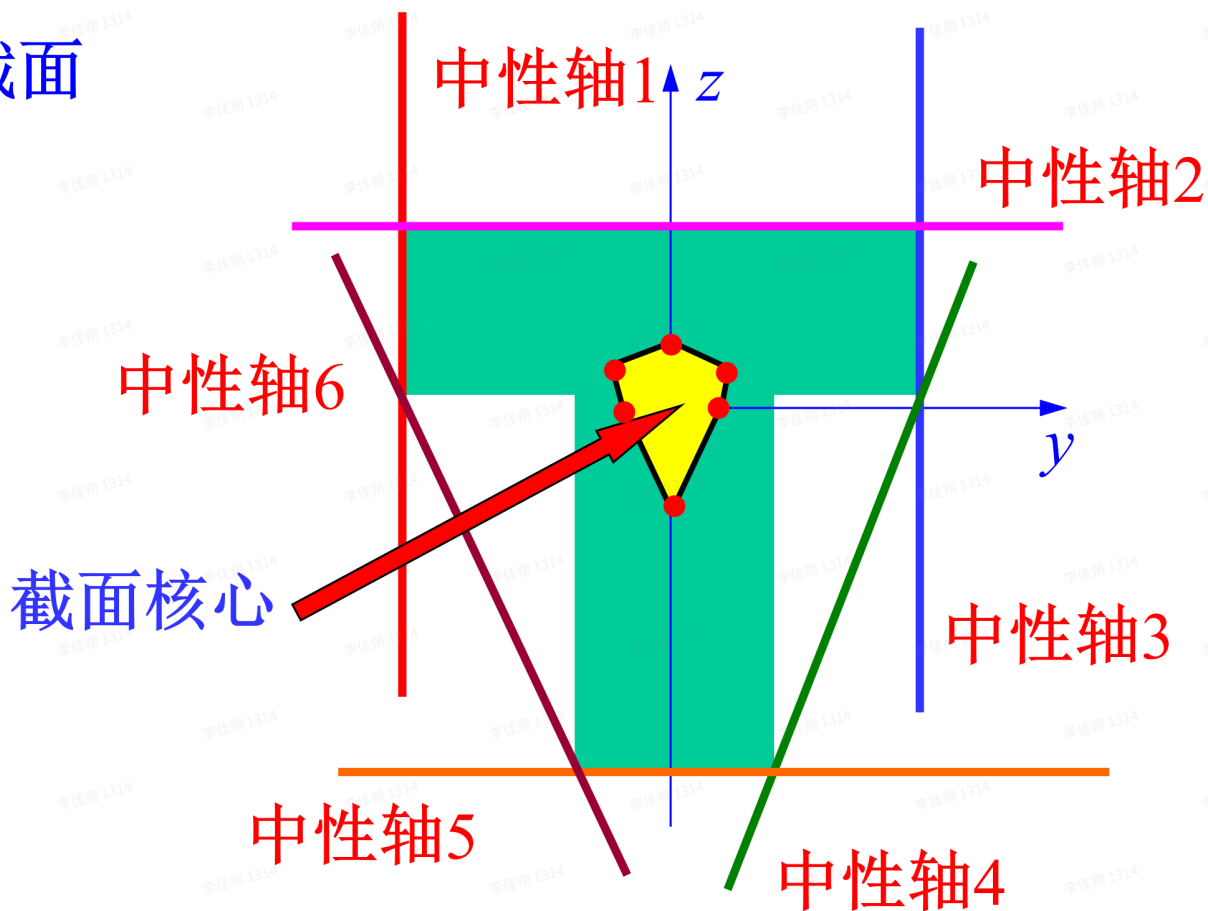
$$1 + \frac{y_F y_0}{i_z^2} + \frac{z_F z_0}{i_y^2} = 0$$

可知, 通过同一点 (y_0, z_0) 的中性轴方程, 其对应力的作用点 (y_F, z_F) 满足直线方程:

连接四点, 即得截面核心的包络线。

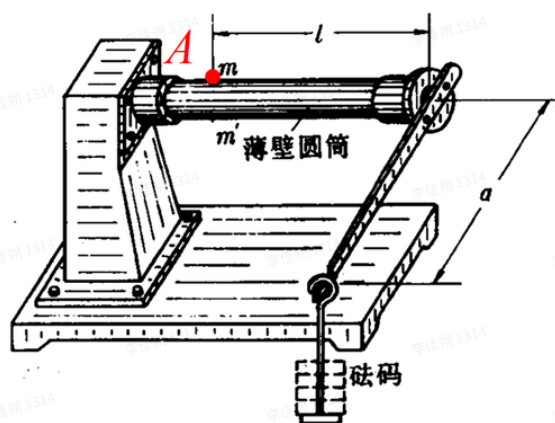
3. T形截面

3. T形截面

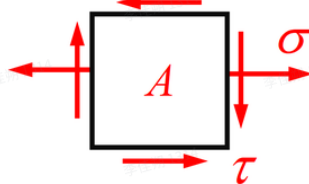


4. 扭弯组合

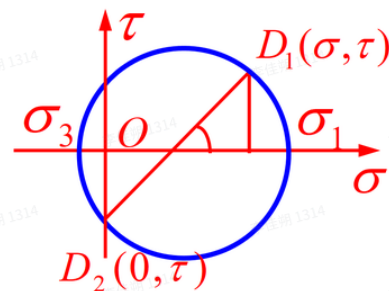
1. 强度条件



单元体



应力圆



强度条件（表面点 $\sigma_2 = 0$ ）：

$$\sigma_1 = \sigma/2 + \sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_3 = \sigma/2 - \sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

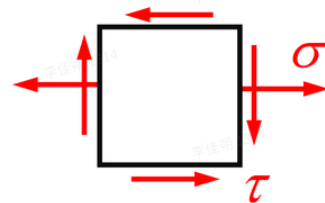
$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

2. 圆轴弯扭组合的强度条件

圆轴受扭转与弯曲的组合作用:

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W}$$



对于直径为 d 的实心圆形截面

$$W_p = 2W$$

W为抗弯系数

$$W_p = \frac{1}{16} \pi d^3$$

$$W = \frac{1}{32} \pi d^3$$

对于外直径为 D , 内直径为 d 的圆环形截面

$$W_p = 2W$$

$$W_p = \frac{1}{16} \pi D^3 (1 - \alpha^4)$$

$$W = \frac{1}{32} \pi D^3 (1 - \alpha^4)$$

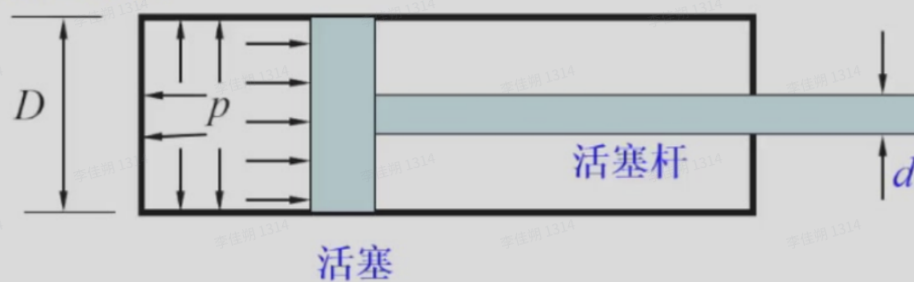
$$\alpha = \frac{d}{D}$$

5. 组合变形的普遍情况

6. 压杆的截面设计

压杆的截面设计

例3 油缸活塞直径 $D = 65\text{mm}$, 油压 $p = 1.2\text{MPa}$ 。活塞杆长度 $l = 1250\text{mm}$, 材料为35钢, $\sigma_p = 220\text{MPa}$, $E = 210\text{GPa}$, $[n_{st}] = 6$ 。试确定活塞杆的直径。



解: 活塞杆承受的轴向压力为

$$F = \frac{\pi D^2}{4} \cdot p = 3.98 \text{ kN}$$

活塞杆应承受的临界压力为

$$F_{cr} = n_{st} \cdot F = 6 \times 3.98 = 23.89 \text{ kN}$$

$$F_{cr} = 23.89 \text{ kN}$$

把活塞的两端简化为铰支座 $\mu=1$

(1) 先用欧拉公式确定直径

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E \frac{\pi d^4}{64}}{(\mu l)^2} \quad \text{求得 } d = 24.6 \text{ mm}$$

(2) 需验算欧拉公式的适用条件

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{\mu \cdot l}{\frac{d}{4}} = 203.15 \quad \lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{210 \times 10^9}{220 \times 10^6}} = 97.0$$

$\lambda > \lambda_p$ 可用欧拉公式计算临界压力

即所得结果即为最终的正确结果！也可转换成正问题来计算！

若不满足欧拉公式的适用条件，需改变直径，重新计算！

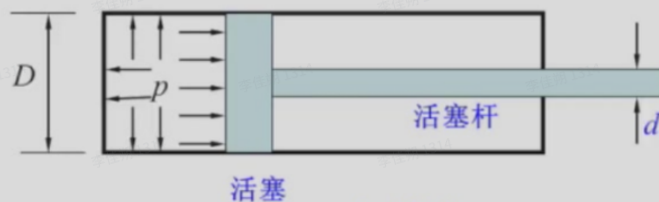
$$\sigma_{cr} = a - b\lambda$$

$$d \rightarrow \lambda \rightarrow F_{cr} = \sigma_{cr} A \geq n_{st} F$$

$$l = 1250 \text{ mm}$$

$$\sigma_p = 220 \text{ MPa}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$



压杆稳定

1. 欧拉公式

- 条件：线弹性小变形

欧拉公式的普遍形式：

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

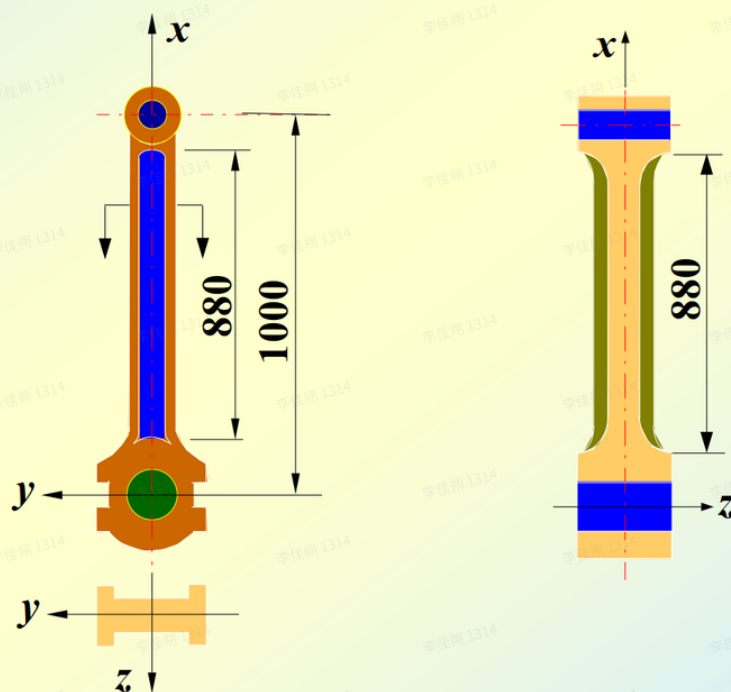
μ 长度系数（无量纲）

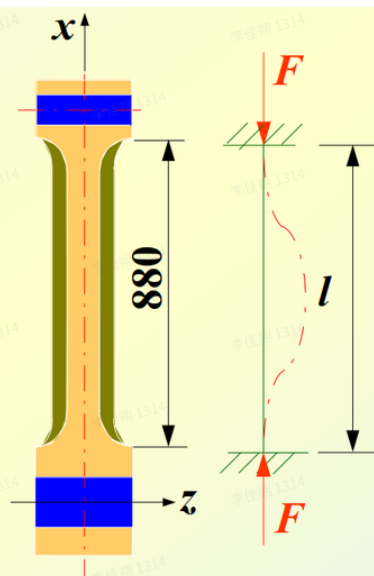
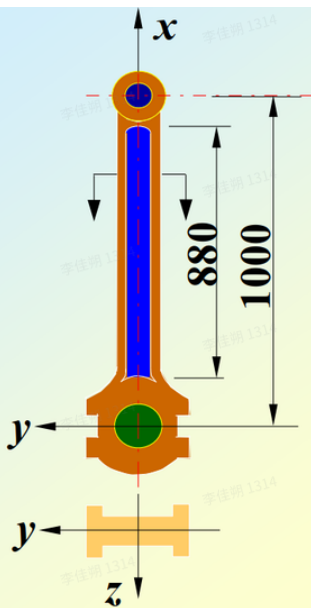
μl 相当长度（相当于两端铰支杆）

支承情况	两端铰支	一端固定 一端铰支	两端固定	一端固定 一端自由	两端固定但可沿 横截面相对移动
失稳时挠曲 线的形状					
欧拉公式	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$
长度因数	$\mu=1$	$\mu \approx 0.7$	$\mu=0.5$	$\mu=2$	$\mu=1$

ly还是lz

例题1 已知一内燃机、空气压缩机的连杆为细长压杆. 截面形状为工字钢形, 惯性矩 $I_z=6.5 \times 10^4 \text{ mm}^4$, $I_y=3.8 \times 10^4 \text{ mm}^4$, 弹性模量 $E=2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$. 试计算临界力 F_{cr} .





分析思路: (1) 杆件在两个方向的约束情况不同;
(2) 计算出两个临界压力. 最后取小的一个作为压杆的临界压力.

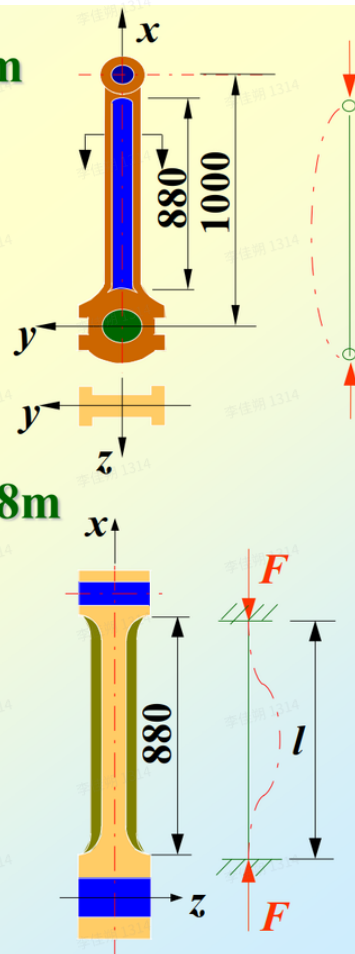
解: xOy 面: 约束情况为两端铰支 $\mu=1$, $I=I_z$, $l=1\text{m}$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{3.14^2 \times 2.1 \times 10^{11} \times 6.5 \times 10^{-8}}{(1 \times 1)^2} = 134.6 \text{ kN}$$

xOz 面: 约束情况为两端固定 $\mu=0.5$, $I=I_y$, $l=0.88\text{m}$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{3.14^2 \times 2.1 \times 10^{11} \times 3.8 \times 10^{-8}}{(0.5 \times 0.88)^2} = 406.4 \text{ kN}$$

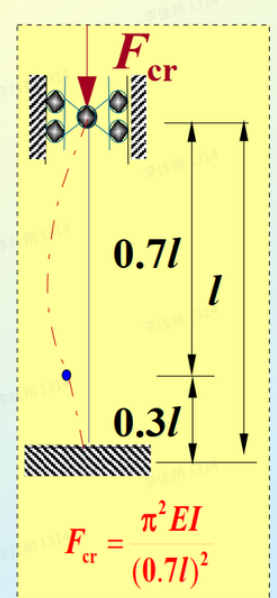
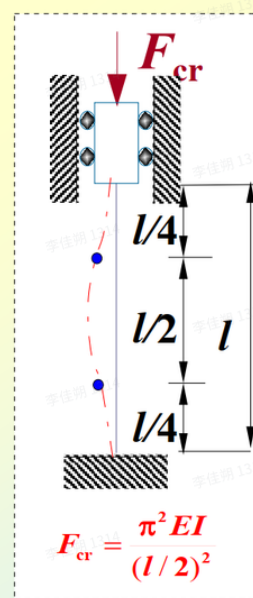
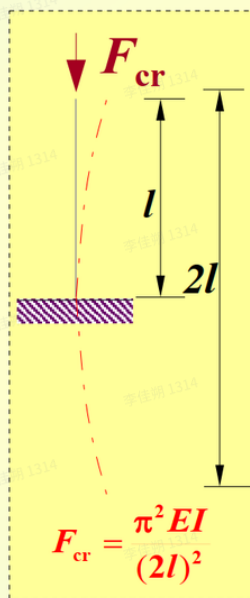
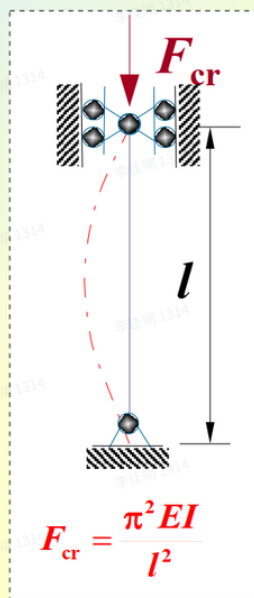
所以连杆的临界压力为134.6kN.



2. 相当长度的物理意义

(1) 相当长度 μl 的物理意义

压杆失稳时，挠曲线上两拐点间长度就是压杆的相当长度 μl ，相当于半波正弦曲线的一段长度。



3. 经验公式与适用条件

• **压杆柔度** $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ μ 四种取值情况, $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

• **临界柔度** $\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$ σ_p — 比例极限

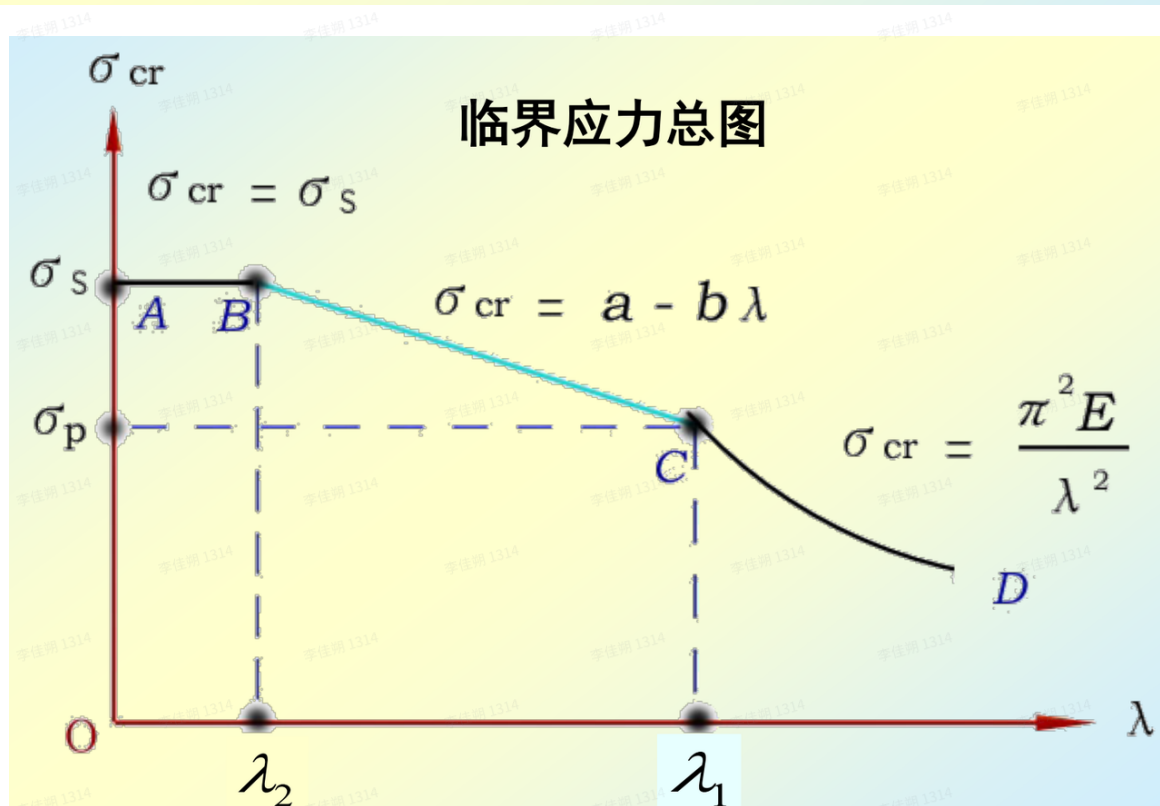
$\lambda_2 = \frac{a - \sigma_s}{b}$ σ_s — 屈服极限

• **临界应力**

$\lambda \geq \lambda_1$ (大柔度杆) $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ 欧拉公式

$\lambda_1 > \lambda \geq \lambda_2$ (中柔度杆) $\sigma_{cr} = a - b\lambda$ 直线公式

$\lambda < \lambda_2$ (小柔度杆) $\sigma_{cr} = \sigma_s$ 强度问题



4. 压杆的稳定校核

$$F \leq [F] = \frac{F_{cr}}{n_{st}} \quad n_{st} \text{ — 稳定安全系数}$$

工作安全系数

$$n = \frac{F_{cr}}{F} \geq n_{st}$$

或

$$n = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma} \geq n_{st}$$

压杆稳定性条件

$$n = \frac{F_{cr}}{F} \geq n_{st}$$

F_{cr} — 压杆临界压力

F — 压杆实际压力

5. 提高压杆稳定性的措施

1. 减小长度系数(增强约束)

2. 改变压杆的约束条件 从 § 9.3 的讨论看出, 改变压杆的支座约束条件直接影响临界力的大小。例如长为 l , 两端铰支的压杆, 其 $\mu = 1$, $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ 。若在这一压杆的中点增加一个中间支座, 或者把两端改为固定端 (图 9.21),

则相当长度变为 $\mu l = \frac{l}{2}$, 临界压力变为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

可见临界压力变为原来的 4 倍。一般来说, 增强压杆的约束, 使其更不容易发生弯曲变形, 都可以提高压杆的稳定性。

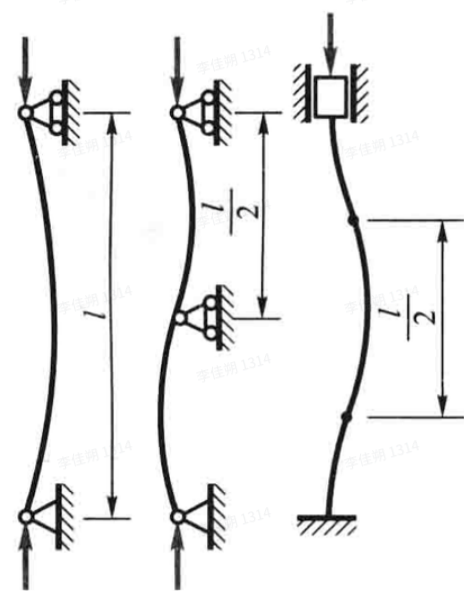


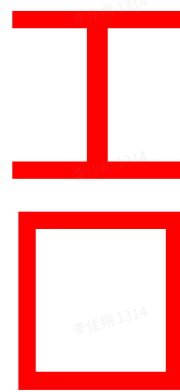
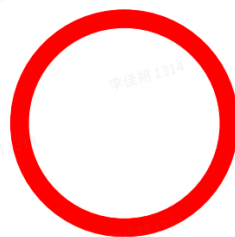
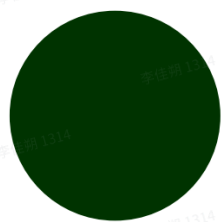
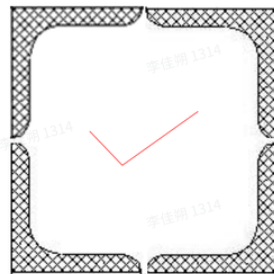
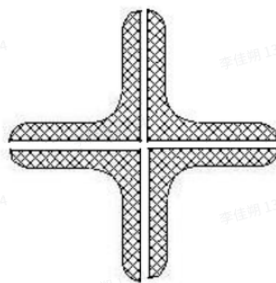
图 9.21

2. 增大截面惯性矩

➤ 增大 E

➤ 增大 I

工程中常采用工字型,
框型截面



截面的优化方向

3. 其他可以增大 F_{cr} 的措施

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

欧拉公式

F_{cr} 越大越稳定

- 减小压杆长度 l
- 减小长度系数 μ (增强约束)
- 增大截面惯性矩 I (合理选择截面形状)
- 增大弹性模量 E (合理选择材料)

动载荷

1. 直线运动构件的动应力

2. 转动构件的动应力

3. 自由落体冲击问题

- K_d 为动荷系数

$$k_d = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \right)$$

$$\Delta_d = K_d \Delta_{st}$$

$$P_d = K_d \cdot P$$

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

Δ_{st} 为冲击物以静载方式作用在冲击点时, 冲击点的静位移.

讨 论

(1) 当载荷突然全部加到被冲击物上, 即 $h=0$ 时

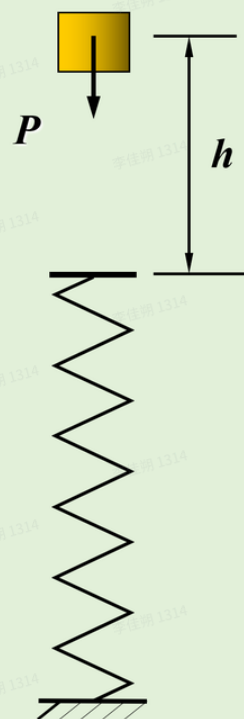
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 2$$

由此可见, 突加载荷的动荷系数是2, 这时所引起的应力和变形都是静荷应力和变形的2倍.

(2) 若已知冲击开始瞬间冲击物与被冲击物接触时的速度为 v , 则

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$$



(3) 若已知冲击物自高度 h 处以初速度 v_0 下落, 则

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2 + 2gh}{g\Delta_{st}}}$$

例题 突然制动滑轮

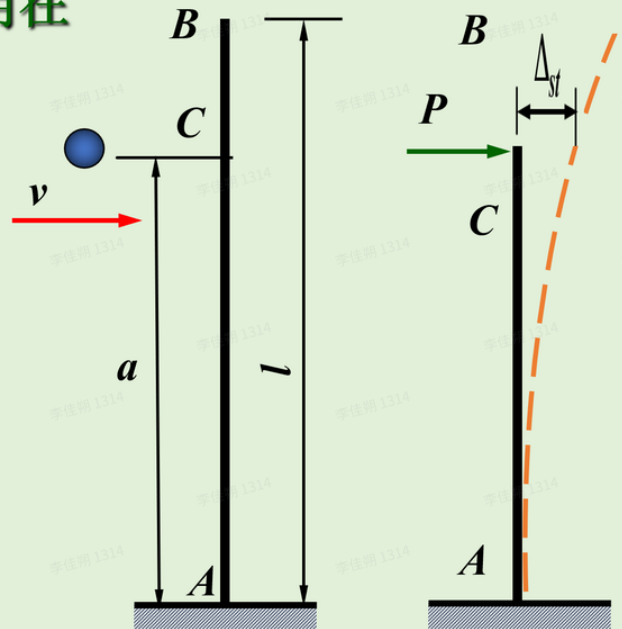
4. 水平冲击问题

冲击物的重量 P 以静载方式作用在冲击点时, 冲击点的静位移.

$$\Delta_{st} = \frac{Pa^3}{3EI}$$

$$\Delta_d = \sqrt{\frac{v^2}{g} \left(\frac{Pa^3}{3EI} \right)} = \Delta_{st} \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$$

$$K_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$$



K_d 称为水平冲击时的动荷系数 $\Delta_d = K_d \Delta_{st} \quad \sigma_d = K_d \sigma_{st}$

σ_{st} 是所求点处的静应力。

当杆受静水平力 P 作用时，杆的固定端外缘是危险点。

$$\sigma_{st} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{Pa}{W}$$

杆危险点处的冲击应力为

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st} = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} \cdot \frac{Pa}{W}$$

5. 静位移大的动荷系数小

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{V_{est}}}$$

(Perpendicular impact)

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} = \sqrt{\frac{T}{V_{est}}}$$

(Horizontal impact)

$\Delta_{st} \uparrow, V_{est} \uparrow \Rightarrow K_d \downarrow$

Example

$$\Delta_{st}^{(2)} < \Delta_{st}^{(1)} < \Delta_{st}^{(3)}$$

$$K_d^{(2)} > K_d^{(1)} > K_d^{(3)}$$

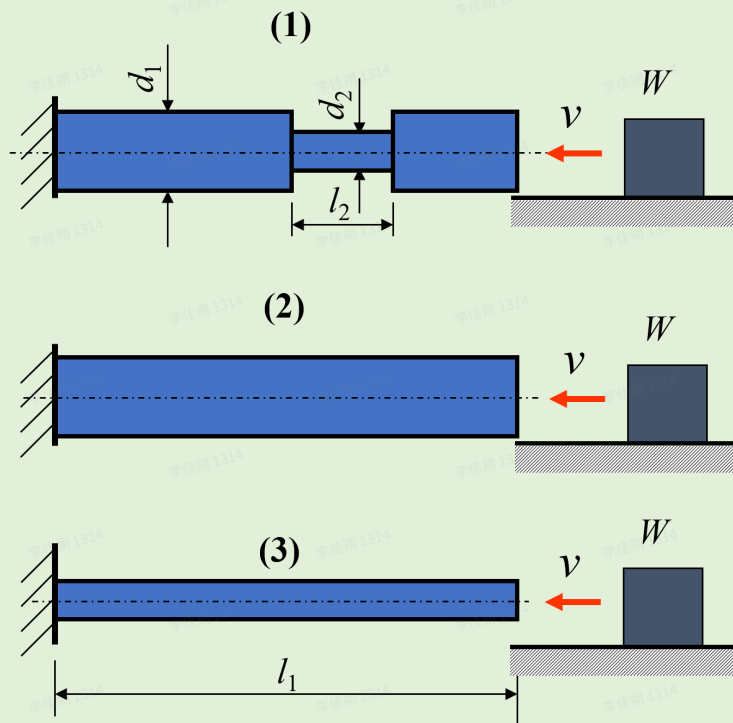
$$(\sigma_d = K_d \sigma_{st})$$

When $d_2/d_1 = 0.8$, $l_2/l_1 = 0.1$

$$\sigma_d^{(3)} = 0.82\sigma_d^{(1)} = 1.25\sigma_d^{(2)}$$

$$\sigma_d^{(1)} = 1.52\sigma_d^{(2)}$$

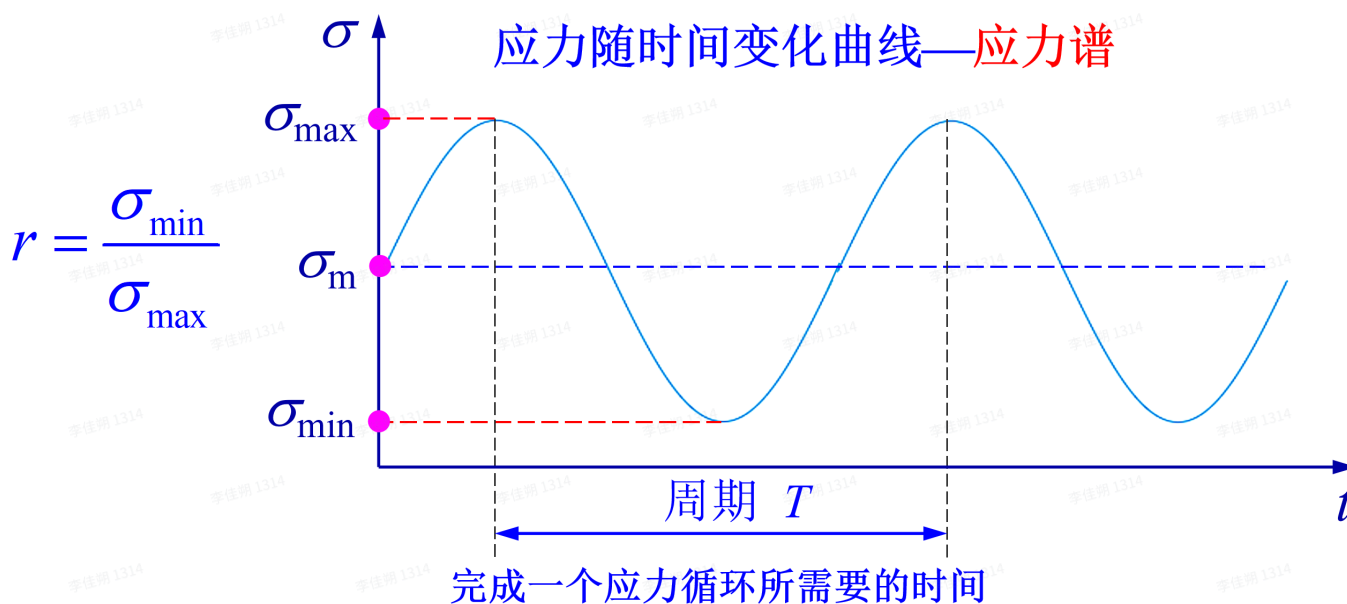
$$\sigma_d^{(1)} > \sigma_d^{(3)} > \sigma_d^{(2)}$$



交变应力

循环特征(应力比)、平均应力、应力幅

(1) 循环特征（应力比） Cycle property



(2) 平均应力 Average stress

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$$

(3) 应力幅 Amplitude of stress

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

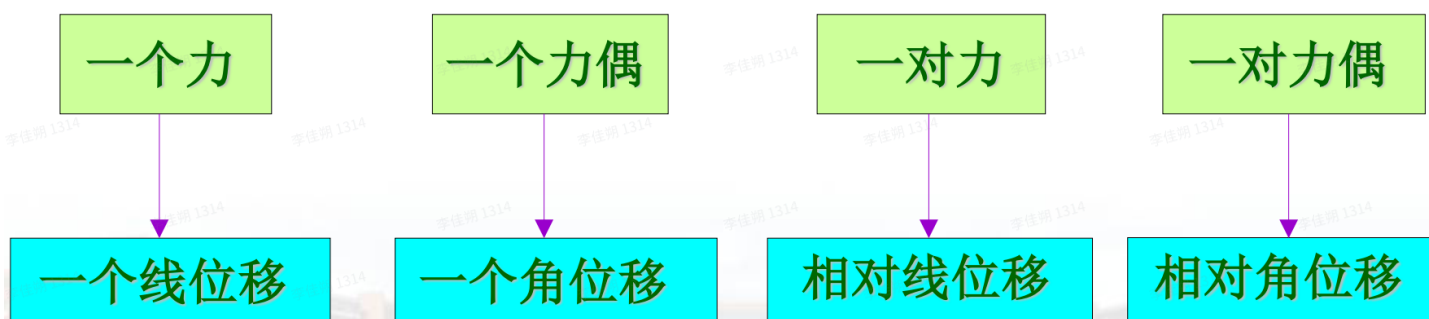
能量法

1. 大前提

(1) 力和位移都应理解为广义的。

(2) 这里是指结构不可能发生刚性位移的情况下,只是由变形引起的位移。

(2) F_i 为广义力, δ_i 为相应的位移



2. 组合变形的应变能



力做功一般不可叠加,但是轴力、扭矩、弯矩的功可以叠加(位移相互独立[小变形])

内力可以叠加,应变可以叠加(相对外力)

该公式要求线弹性小变形

截面上存在几种内力,各个内力及相应的各个位移相互独立,力独立作用原理成立,各个内力只对其相应的位移做功。

$$V_\varepsilon = \int_l \frac{F_N^2(x)}{2EA(x)} dx + \int_l \frac{T^2(x)}{2GI_p(x)} dx + \int_l \frac{M^2(x)}{2EI(x)} dx$$

3. 纯剪切应力状态下的应变能密度

- 条件：线弹性小变形

比能为
$$v_{\varepsilon} = \frac{dV_{\varepsilon}}{dV} = \frac{dW}{dV} = \frac{dW}{dx dy dz} = \frac{1}{2} \tau \gamma$$

4. 变形能的普遍表达式

- 条件：线弹性小变形

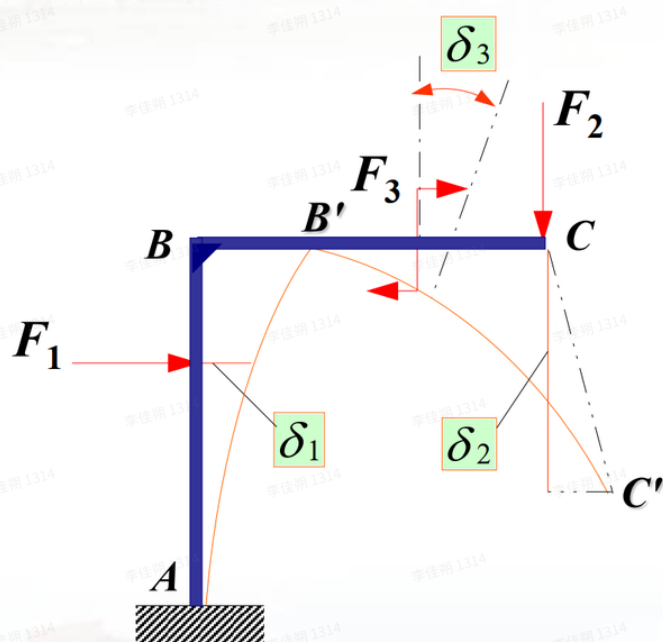
二、变形能的普遍表达式 (General formula for strain energy)

$$V_{\varepsilon} = \frac{1}{2} F \delta$$

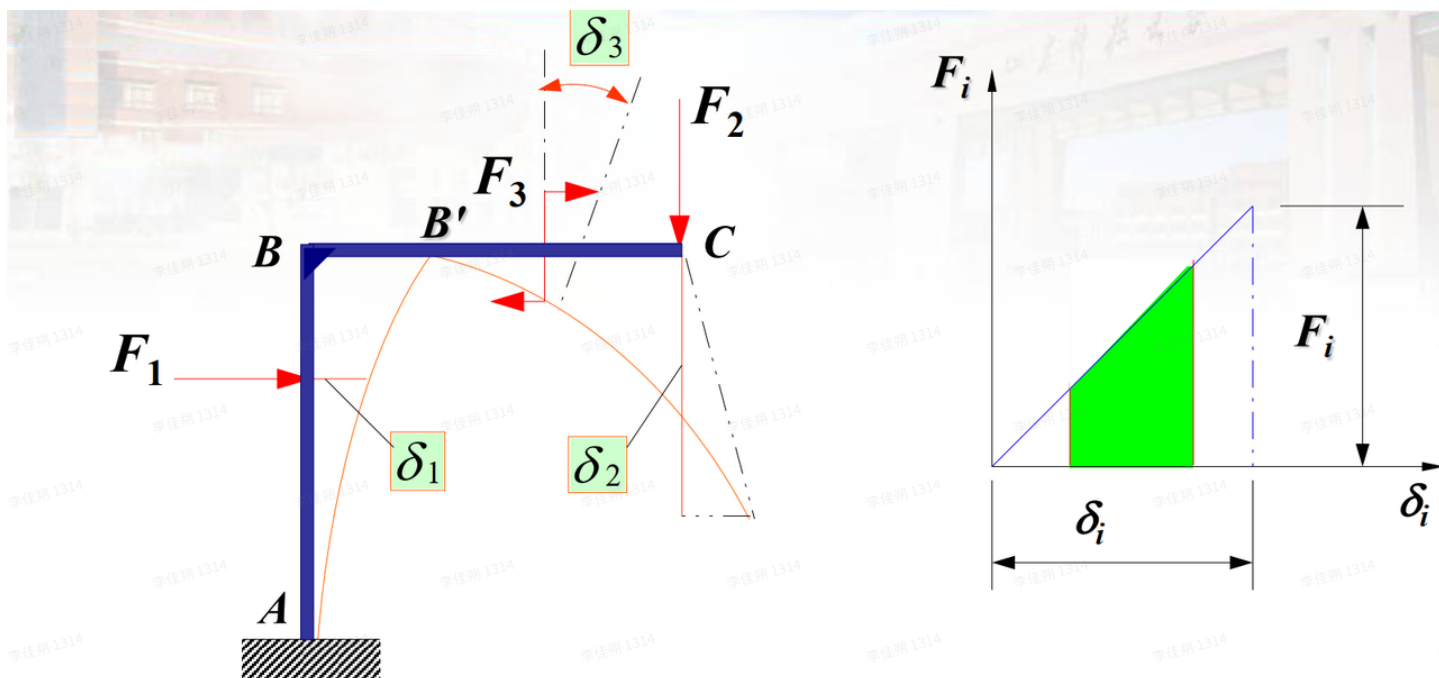
F --广义力(包括力和力偶)

δ --广义位移

(包括线位移和角位移)



假设广义力按某一比例由零增至最后值对应的广义位移也由零增至最后值。



在整个加载过程中结构的变形能等于外力的功

$$V_{\varepsilon} = \frac{1}{2} (F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2 + F_3 \delta_3)$$

—— 克拉贝隆原理（只限于线性结构）

18

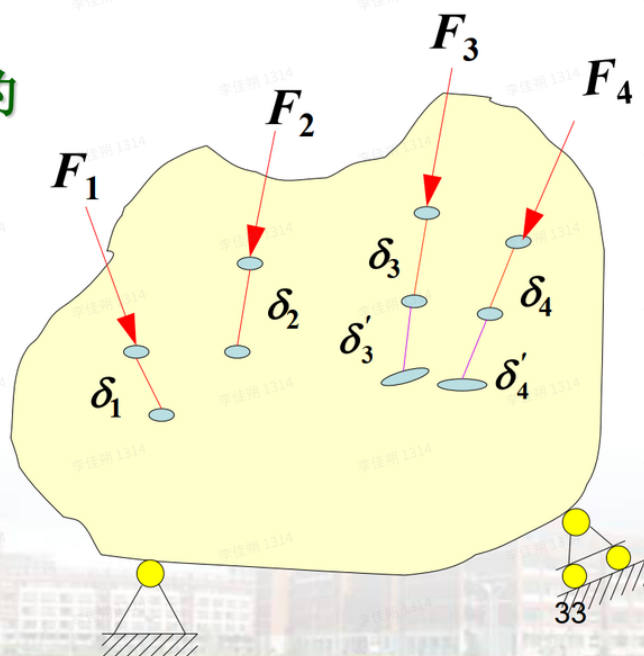
5. 功的互等定理

功的互等定理（reciprocal work theorem）: 第一组力在第二组力引起的位移上所作的功, 等于第二组力在第一组力引起的位移上所作的功.

由于应变能只决定于力和位移的最终值, 与加力的次序无关, 故

$$V_{\varepsilon 1} = V_{\varepsilon 2}$$

$$F_1 \delta'_1 + F_2 \delta'_2 = F_3 \delta'_3 + F_4 \delta'_4$$



6. 位移互等定理

若第一组力 F_1 , 第二组力只有 F_3 , 则

$$F_1 \delta'_1 = F_3 \delta'_3$$

如果 $F_1 = F_3$, 则有 $\delta'_1 = \delta'_3$

位移互等定理 (reciprocal work theorem) :

F_1 作用点沿 F_1 方向因作用 F_3 而引起的位移等于 F_3 作用点沿 F_3 方向因作用 F_1 而引起的位移. (The deflection at A due to a

7. 莫尔定理

💡 一般来说, 对于有弯曲变形的杆件, 可以不考虑拉伸、剪切与扭转变形(若题中给G, 则需要考虑扭转)

$$\Delta = \int_l \frac{F_N(x) \bar{F}_N(x)}{EA} dx + \int_l \frac{T(x) \bar{T}(x)}{GI_p} dx + \int_l \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx$$

注意: 上式中 Δ 应看成广义位移, 把单位力看成与广义位移相对应的广义力.

39

桁架:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i}{EA}$$

(1) $M(x)$: 结构在原载荷下的内力;

(2) $\bar{M}$ ——去掉主动力,在所求广义位移点,沿所求广义位移的方向加广义单位力时,结构产生的内力;

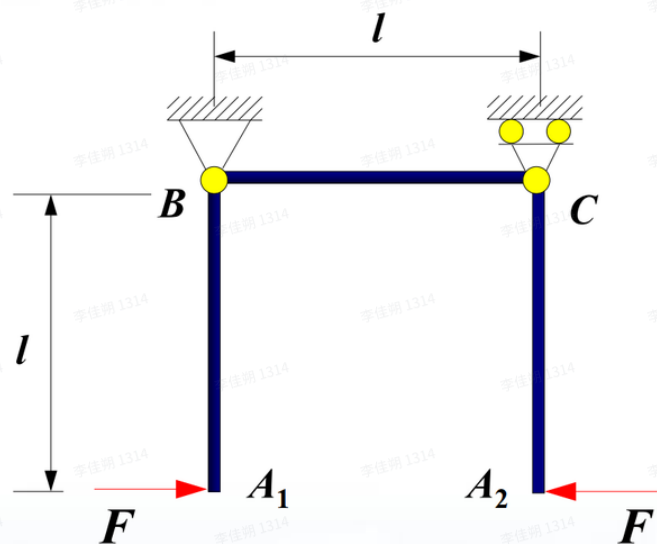
(3) 所加广义单位力与所求广义位移之积,必须为功的量纲;

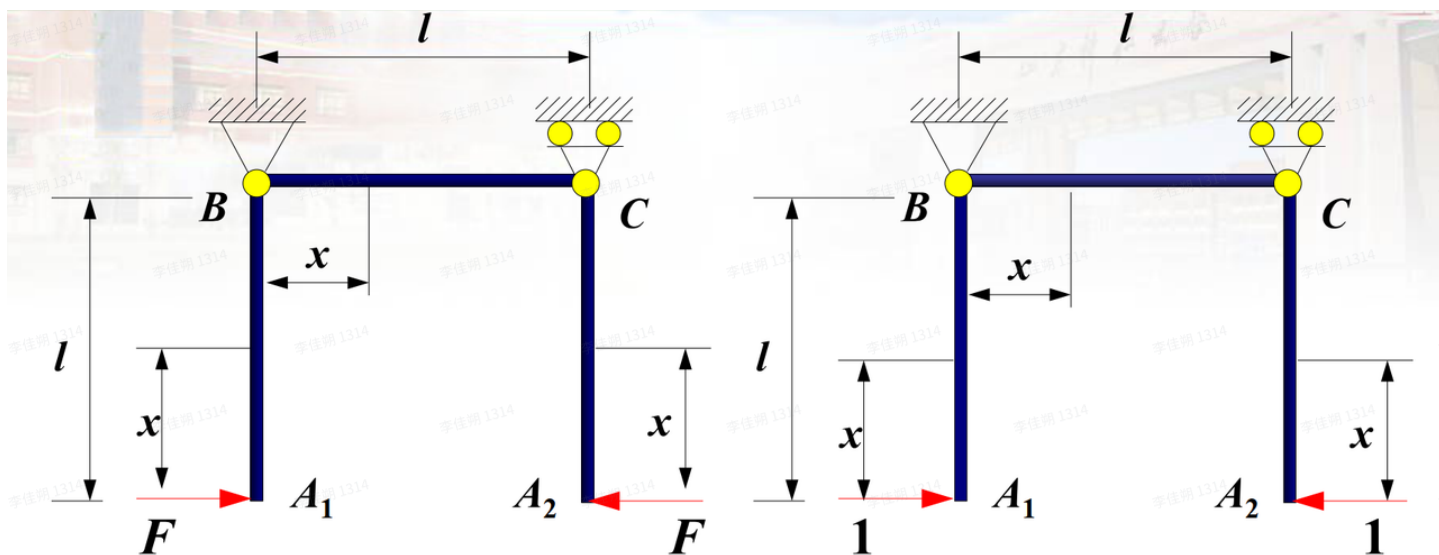
(4) $\bar{M}(x)$ 与 $M(x)$ 的坐标系必须一致,每段杆的坐标系可自由建立;

(5) 莫尔积分必须遍及整个结构.

例题 用莫尔定理求相对位移

例题10 由三杆组成的刚架, B,C 为刚性节点,三杆的抗弯刚度都是 EI ,试用单位载荷法求 A_1, A_2 两点的相对位移.





解：在 A_1, A_2 处加一对水平单位力. B, C 两支座的反力均为零.

$$A_1B: \quad M(x) = -Fx \quad M(x) = -x$$

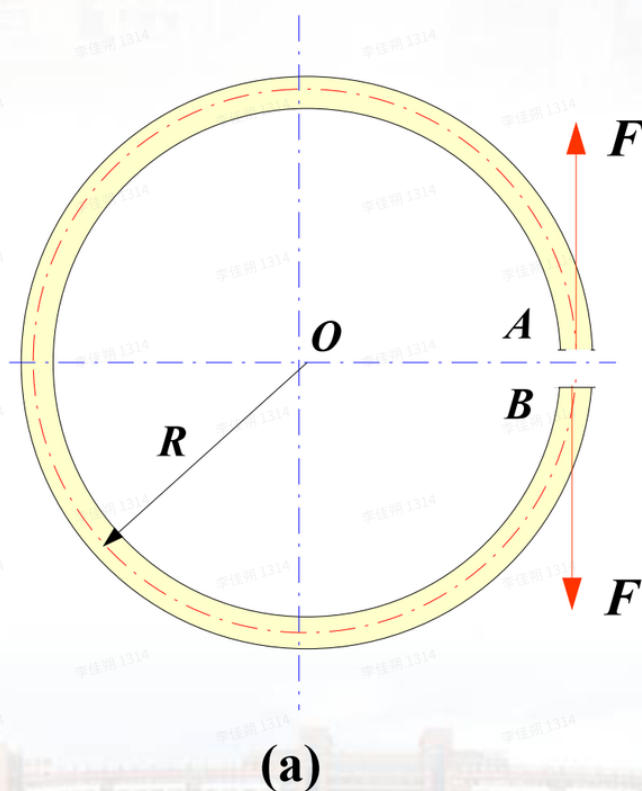
$$BC: \quad M(x) = -Fl \quad M(x) = -l$$

$$CA_2: \quad M(x) = -Fx \quad M(x) = -x$$

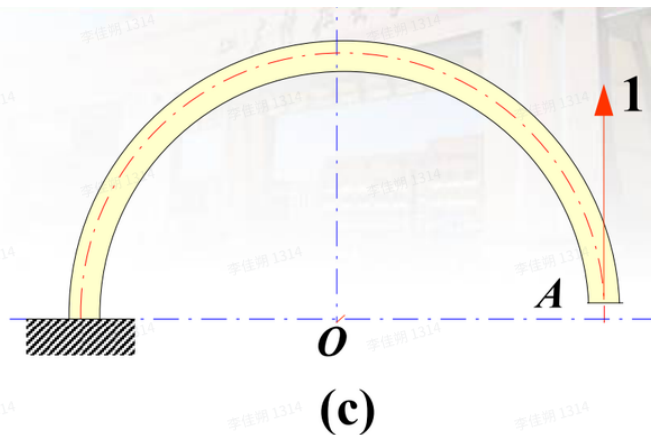
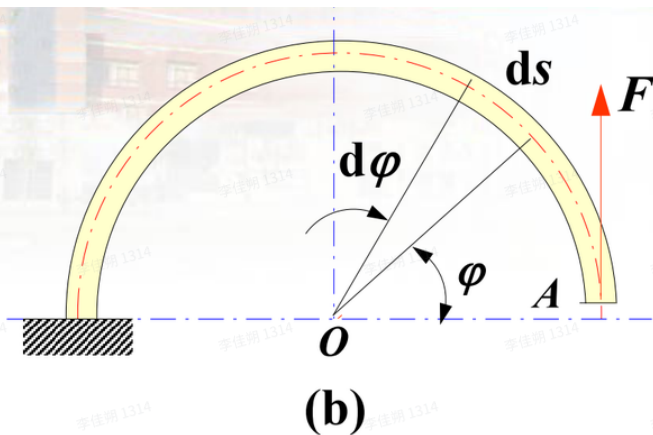
$$\Delta = \frac{1}{EI} \left[2 \int_0^l (-Fx)(-x) dx + \int_0^l (-Fl)(-l) dx \right] = \frac{5Fl^3}{3EI} \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

例题 对称曲杆

例题13 计算图 (a) 所示开口圆环在 F 力作用下切口的张开量 Δ_{AB} . EI =常数.



解:



$$M(\varphi) = -FR(1 - \cos \varphi)$$

$$\bar{M}(\varphi) = -R(1 - \cos \varphi)$$

$$\Delta_{AB} = 2 \int_0^\pi \frac{M(\varphi) \bar{M}(\varphi)}{EI} R d\varphi$$

$$= 2 \int_0^\pi \frac{FR^2 (1 - \cos \varphi)^2}{EI} R d\varphi = \frac{3\pi FR^3}{EI}$$

8. 图解法

对于等直杆有

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_l M(x) \bar{M}(x) dx = \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{EI}$$

即积分可用 $M(x)$ 图的面积 ω 和与 $M(x)$ 图形心 C 对应的 $\bar{M}_c$ 的乘积来代替

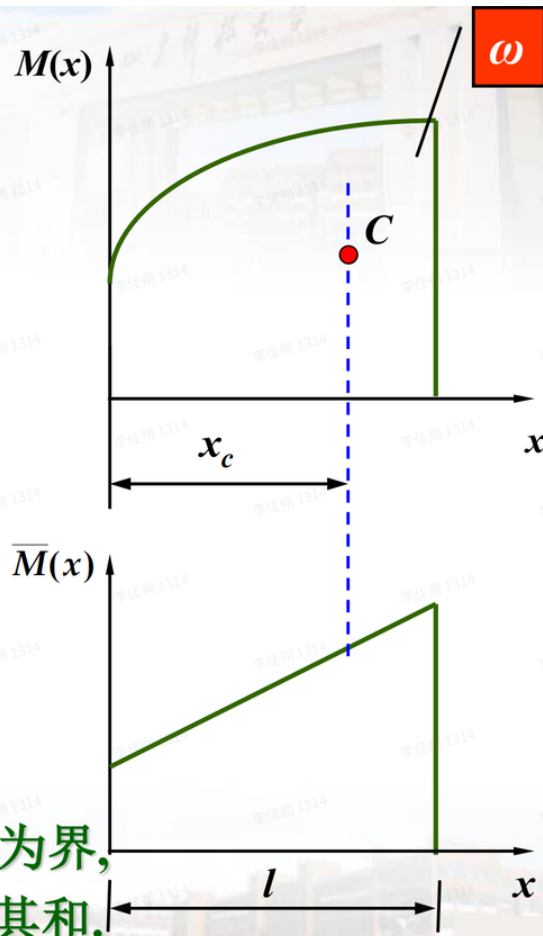
当 M 图为正弯矩时, ω 应代以正号.

当 M 图为负弯矩时, ω 应代以负号.

$\bar{M}_c$ 也应按弯矩符号给以正负号.

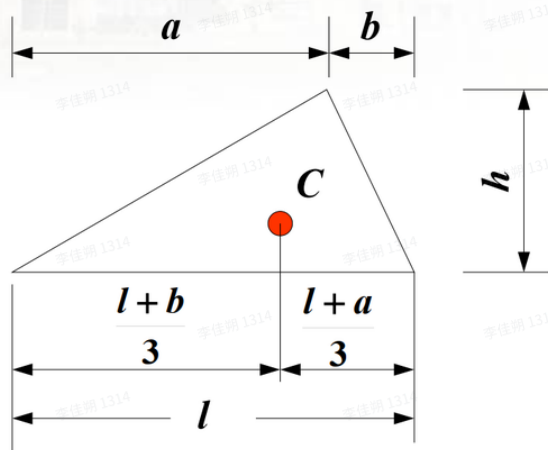
注意 有时 $M(x)$ 图为连续光滑曲线,

而 $\bar{M}(x)$ 为折线, 则应以折线的转折点为界, 把积分分成几段, 逐段使用图乘法, 然后求其和.

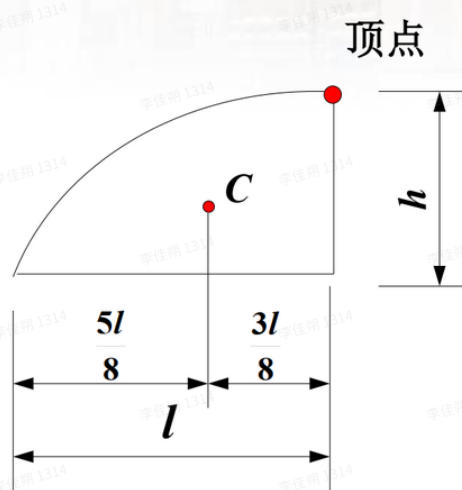


几种常见图形的面积和形心

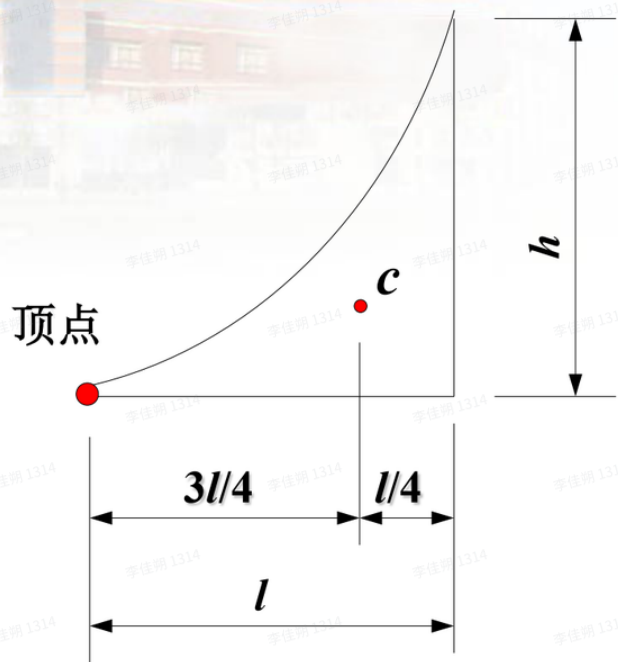
几种常见图形的面积和形心的计算公式



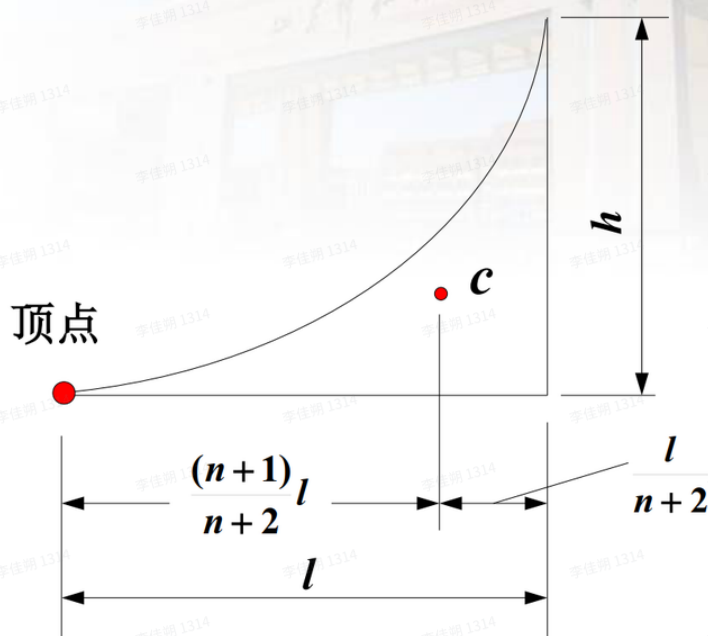
三角形 $\omega = \frac{l \cdot h}{2}$



二次抛物线 $\omega = \frac{2}{3} h \cdot l$

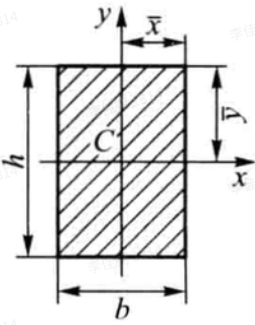
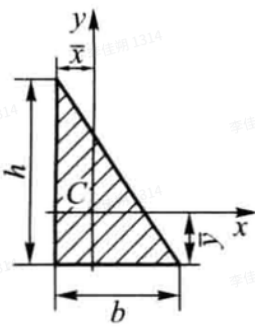
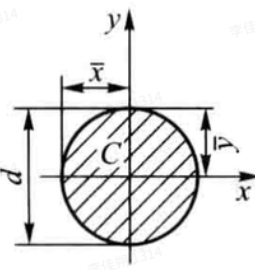
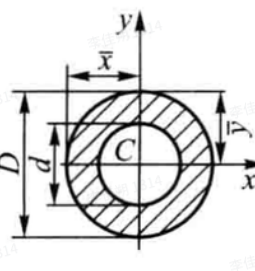


二次抛物线 $\omega = \frac{l \cdot h}{3}$



N 次抛物线 $\frac{l \cdot h}{n+1}$

※常用的几何性质

截面形状和原点 在形心的坐标轴	面积	至形心 C 的距离		惯性矩		惯性积
	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$	I_x	I_y	I_{xy}
	bh	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$	$-\frac{b^2h^2}{72}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	0
	$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$	0

9. 卡氏定理

当 ΔF_i 趋于零时, 上式为 $\frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial F_i} = \delta_i$

这就是卡氏第二定理 (Castigliano's Second Theorem) (卡氏定理) (Castigliano's Theorem)

(1) 卡氏第二定理只适用于线性弹性体

(a) 轴向拉伸与压缩

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \int \frac{F_N^2(x) dx}{2EA} = \int \frac{F_N(x)}{EA} \cdot \frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i} dx$$

(b) 扭转

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \int \frac{T^2(x) dx}{2GI_p} = \int \frac{T(x)}{GI_p} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial F_i} dx$$

(c) 弯曲

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \int \frac{M^2(x) dx}{2EI} = \int \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F_i} dx$$

10. 虚功原理



虚功原理(虚位移原理)既不限定于线性问题,也不限于弹性问题

质点和质点系的虚位移原理:质点和质点系处于平衡状态的充要条件是,作用在其上的力对于虚位移所作的总功为零.

作用在杆件上的力分为外力和内力

外力:荷载和支座反力

内力:截面上各部分间的相互作用力

对于处于平衡状态的杆件,其外力和内力对任意给定的虚位移所作的总虚功等于零.

$$W_e + W_i = 0$$

外力虚功

内力虚功

杆件的约束条件:

(1) 支座约束条件

(2) 各单元体变形的几何相容条件

杆件在荷载作用下所发生的位移都满足上述两类约束条件, 且为微小量, 即符合虚位移的基本要求. 所以, 可以把杆件由荷载作用产生的微小实位移当作虚位移.

(1) 梁的外力虚功

梁上荷载:

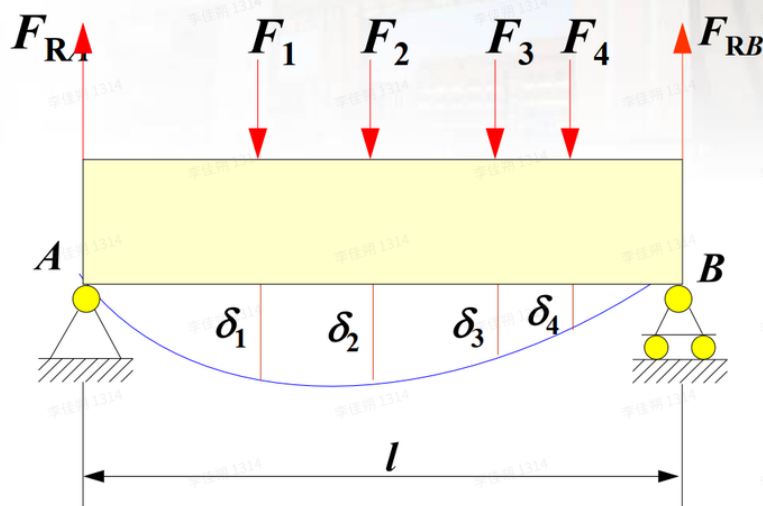
$F_1, F_2, F_3, F_4, F_{RA}, F_{RB}$

给梁任一虚位移, 荷载作用点沿其作用方向的相应虚位移 (支座处没有虚位移) 为

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$

外力虚功为

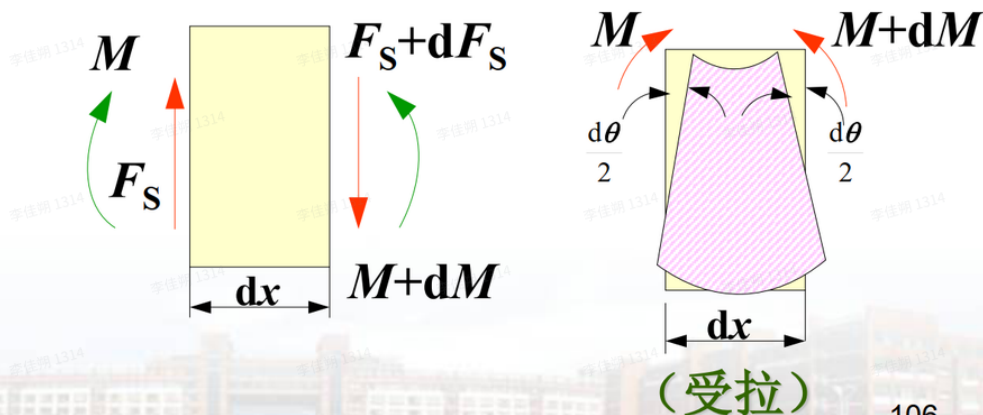
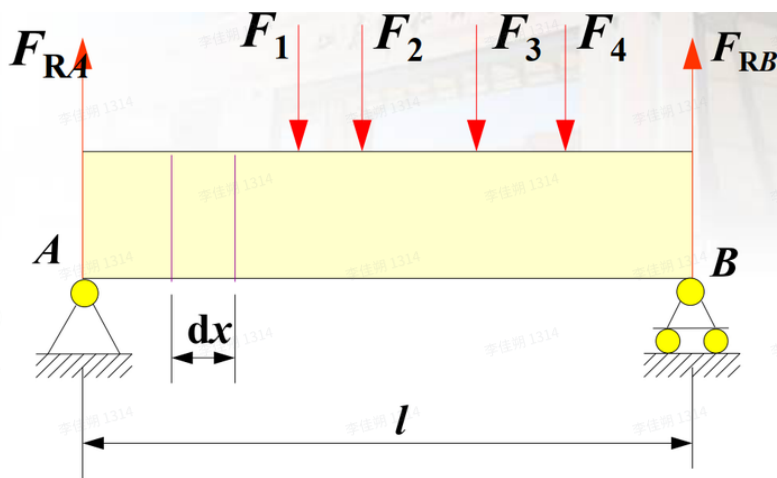
$$W_e = \sum_{i=1}^4 F_i \delta_i + R_A \cdot 0 + R_B \cdot 0 = \sum_{i=1}^4 F_i \delta_i$$



(2) 梁的内力虚功

弯矩虚功

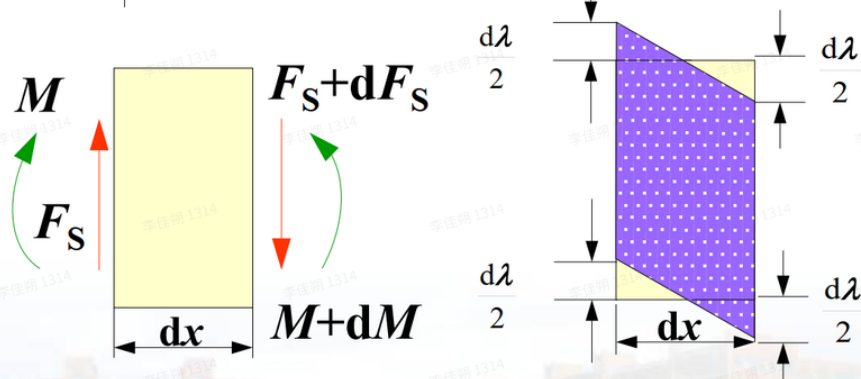
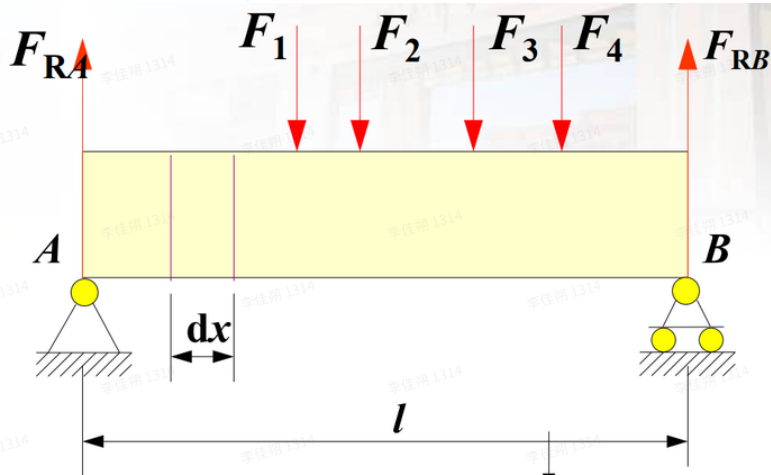
$$M \cdot \frac{d\theta}{2} + (M + dM) \cdot \frac{d\theta}{2}$$



106

剪力虚功

$$F_S \cdot \frac{d\lambda}{2} + (F_S + dF_S) \cdot \frac{d\lambda}{2}$$



(1) 该微段的外力虚功

$$M \cdot \frac{d\theta}{2} + (M + dM) \cdot \frac{d\theta}{2}$$
$$F_S \cdot \frac{d\lambda}{2} + (F_S + dF_S) \cdot \frac{d\lambda}{2}$$

M, F_S 应看作该微段的外力

该微段的外力虚功为（略去二阶小量）

$$M \cdot d\theta + F_S \cdot d\lambda$$

(2) 该微段的内力虚功 dW_i

由该微段的虚位移原理

$$dW_i + dW_e = dW_i + (M \cdot d\theta + F_S \cdot d\lambda) = 0$$

$$dW_i = -(M \cdot d\theta + F_S \cdot d\lambda)$$

(3) 梁的内力虚功

$$W_i = \int_l dW_i = - \int_l (M \cdot d\theta + F_S \cdot d\lambda)$$

梁的虚位移原理为

$$\sum_{i=1}^4 F_i \delta_i - \int_l (M \cdot d\theta + F_S \cdot d\lambda) = 0$$

若横截面上不仅有弯矩 M 和剪力 F_S , 还有轴力 F_N 和扭矩 T , 则杆的虚位移原理为

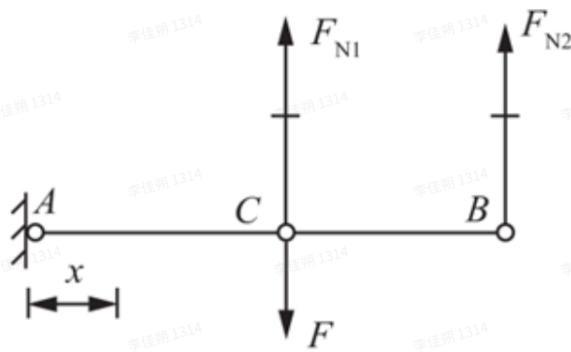
$$\sum_{i=1}^4 F_i \delta_i = \int_l (M \cdot d\theta + F_S \cdot d\lambda + F_N d\delta + T d\phi)$$

(a) δ_i 为 F_i 力作用点沿 F_i 方向的相应虚位移, $d\theta, d\lambda, d\delta, d\phi$ 分别为与弯矩 M , 剪力 F_S , 轴力 F_N 和扭矩 T 相对应虚位移;

(b) 虚位移原理既不限定于线性问题, 也不限于弹性问题。

超静定问题

1. 截断杆与去掉杆: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/648434227>



(b)

图14-2-2

② 考虑横梁变形，结构为一次静不定结构，视杆2为多余约束，将其轴力 F_{N2} 代之以约束力 X_1 ，其相当系统如图14-2-2 (b) 所示。

其力法方程为： $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 。

由静力平衡条件可得，在力 F 单独作用下： $F_{N1} = F$ ， $F_{N2} = 0$ ， $M_1 = M_2 = 0$ 。

当在B点单独作用一单位力时，有

$$\bar{F}_{N1} = -2, \bar{F}_{N2} = 1$$

AC段： $\bar{M}_1 = x$ ($0 \leq x < a$)。

BC段： $\bar{M}_2 = x + \bar{F}_{N1}(x - a) = 2a - x$ ($a \leq x \leq 2a$)。

故由莫尔定理可得

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{F}_N \cdot \bar{F}_N \cdot l}{EA} + \sum \frac{\bar{M} \cdot \bar{M} dx}{EI} = \frac{5l}{EA} + \frac{2a^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{F_N \cdot \bar{F}_N \cdot l}{EA} + \sum \frac{M \bar{M} dx}{EI} = -\frac{2Fl}{EA}$$

将以上两式代入力法方程可得： $X_1 = -\Delta_{1F}/\delta_{11} = 6Fl / (15l + 2a^3A)$ 。

故各杆内力： $F_{N1} = [(3l + 2a^3A) / (15l + 2a^3A)] \cdot F$ ， $F_{N2} = [6l / (15l + 2a^3A)] \cdot F$ 。



此题为截断杆

2. 力法正则方程

上例中以多余力为未知量的变形协调方程可改写成下式

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

变形协调方程的标准形式,即所谓的力法正则方程。

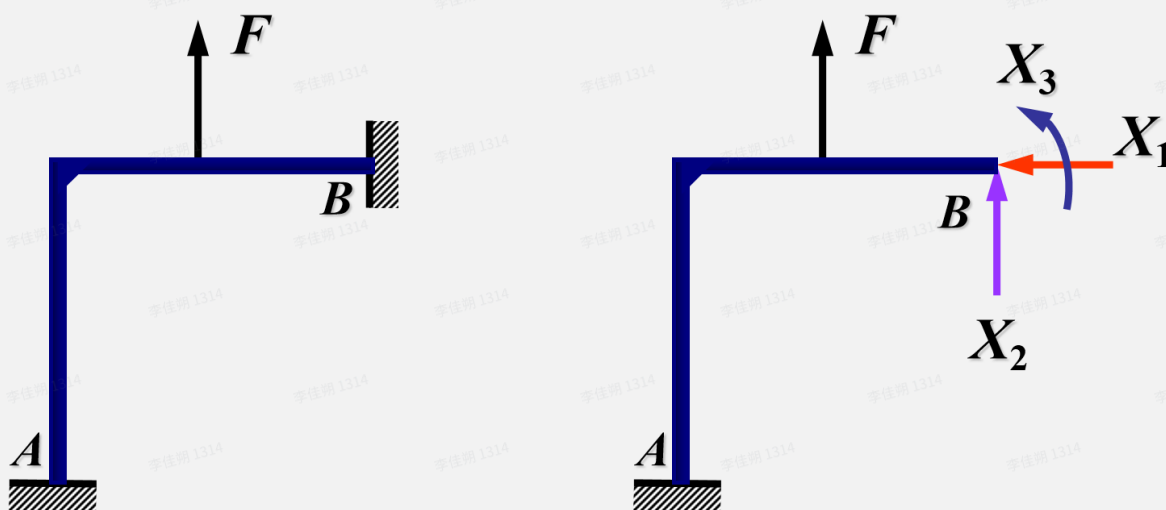
X_1 — 多余未知量;

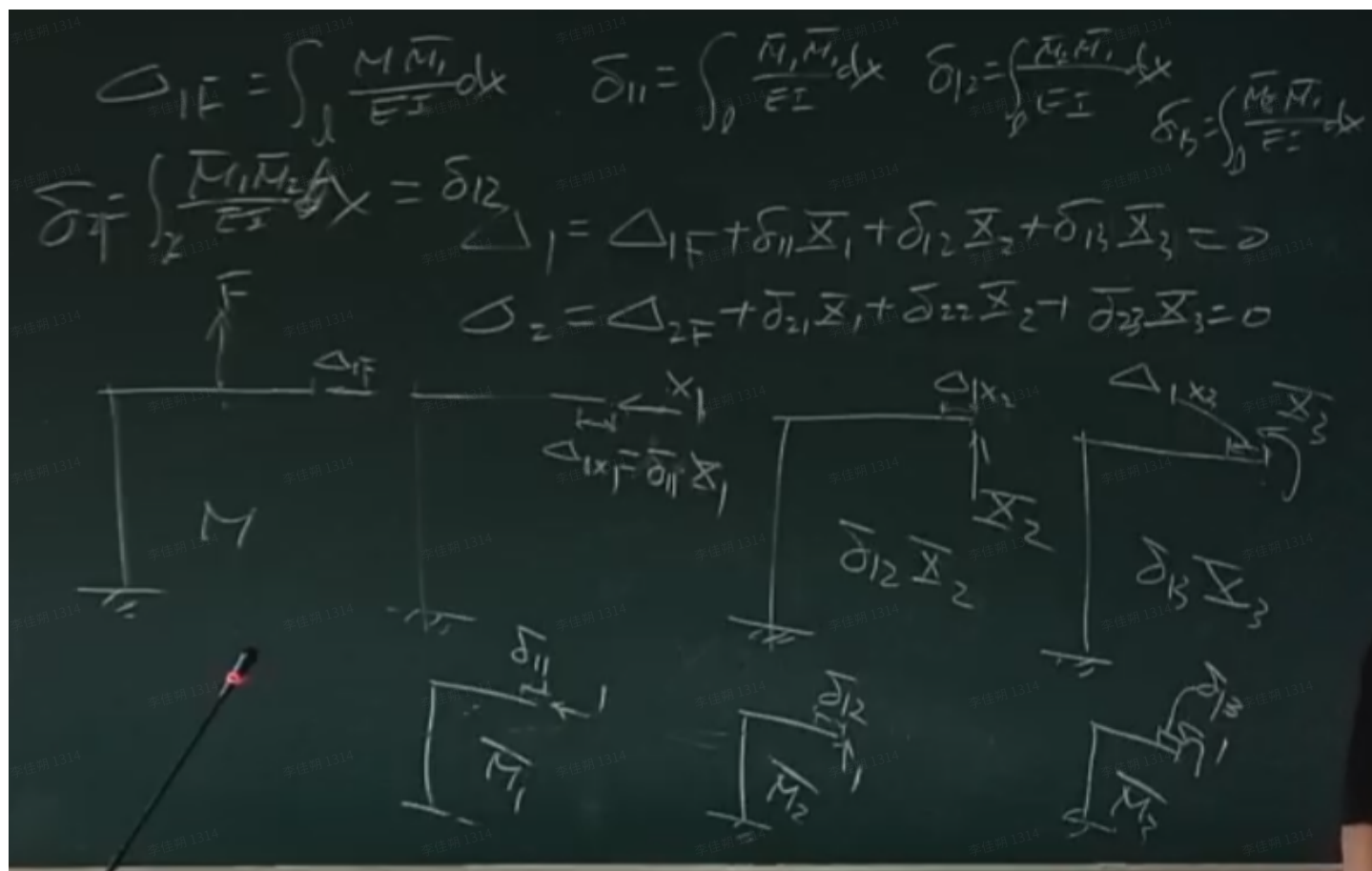
δ_{11} — 在基本静定系上, X_1 取单位值时引起的在 X_1 作用点 X_1 方向的位移;

Δ_{1F} — 在基本静定系上,由原载荷引起的在 X_1 作用点沿 X_1 方向的位移;

示例 三次超静定问题

对于有多个多余约束反力的超静定系统的正则方程如下:





对角阵

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0$$

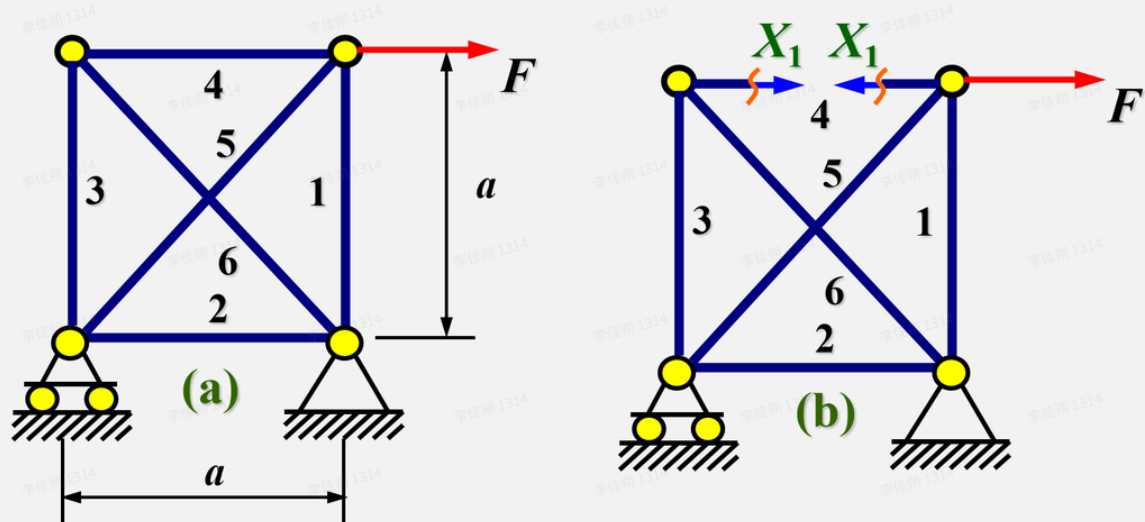
$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \Delta_{3F} \end{pmatrix}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

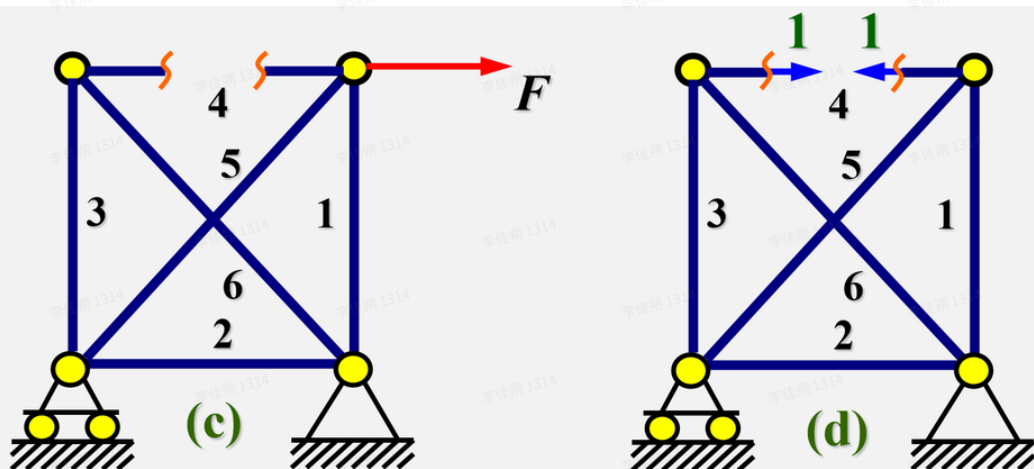
三次超静定系统的正则方程

例题 内力超静定问题

例题6 计算图 (a) 中所示桁架各杆的内力. 设各杆的材料相同, 横截面面积相等.



解: 桁架内部有一个多余约束, 所以各杆的内力确是超静定的. 以杆件4为多余约束, 假想的把它切开, 并代之以多余约束力 X_1 , 得到图 (b) 所示的相当系统.



Δ_{1F} 表示杆4切口两侧截面因载荷而引起的沿 X_1 方向的相对位移; δ_{11} 表示切口两侧截面因单位力而引起的沿 X_1 方向的相对位移 (图d) .

$$\text{力法正则方程 } \delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

由图（c）求出基本静定系在 F 作用下各杆的内力 F_{Ni}

由图（d）求出在单位力作用下各杆的内力 $\overline{F}_{Ni}$

杆件编号	F_{Ni}	$\overline{F}_{Ni}$	l_i	$F_{Ni}\overline{F}_{Ni}l_i$	$\overline{F}_{Ni}\overline{F}_{Ni}l_i$	$F_{Ni}^F = F_{Ni} + \overline{F}_{Ni}X_1$
1	$-F$	1	a	$-Fa$	a	$-F/2$
2	$-F$	1	a	$-Fa$	a	$-F/2$
3	0	1	a	0	a	$F/2$
4	0	1	a	0	a	$F/2$
5	$\sqrt{2}F$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}a$	$-2\sqrt{2}Fa$	$2\sqrt{2}a$	$F / \sqrt{2}$
6	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}a$	0	$2\sqrt{2}a$	$-F / \sqrt{2}$
				$\sum F_{Ni}\overline{F}_{Ni}l_i$ $= -Fa(2 + 2\sqrt{2})$	$\sum \overline{F}_{Ni}\overline{F}_{Ni}l_i$ $= 4(1 + \sqrt{2})a$	

截断的杆在外力作用下内力为0

因为轴力、弯矩等内力相对于外力可以叠加，因此可以看做没有4杆时的内力+四杆的内力作用下的内力($X_1 * \overline{F}_{Ni}$)的叠加

应用莫尔定理

$$\Delta_{1F} = \frac{\sum F_{Ni} \bar{F}_{Ni} l_i}{EA_i} = -\frac{(2 + 2\sqrt{2})Fa}{EA}$$

$$\delta_{11} = \frac{\sum \bar{F}_{Ni} \bar{F}_{Ni} l_i}{EA_i} = \frac{4(1 + \sqrt{2})a}{EA}$$

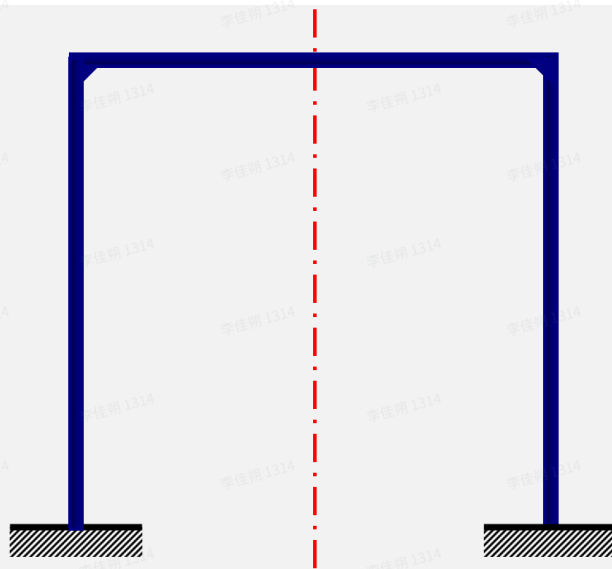
代入方程后求得

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{(2 + 2\sqrt{2})Fa}{4(1 + \sqrt{2})a} = \frac{F}{2}$$

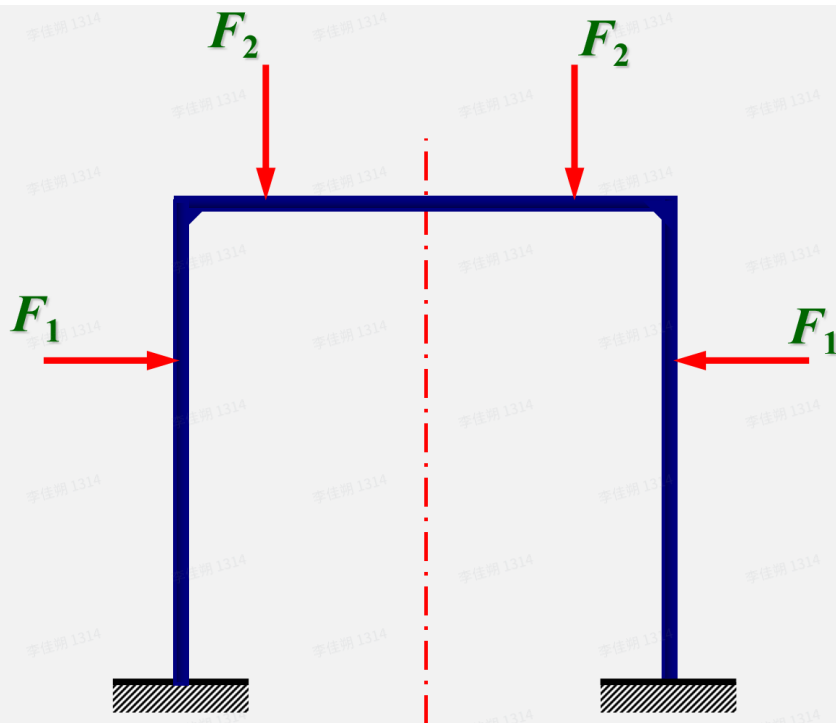
由叠加原理可知桁架内任一杆件的实际内力

$$F_{Ni}^F = F_{Ni} + \bar{F}_{Ni} X_1$$

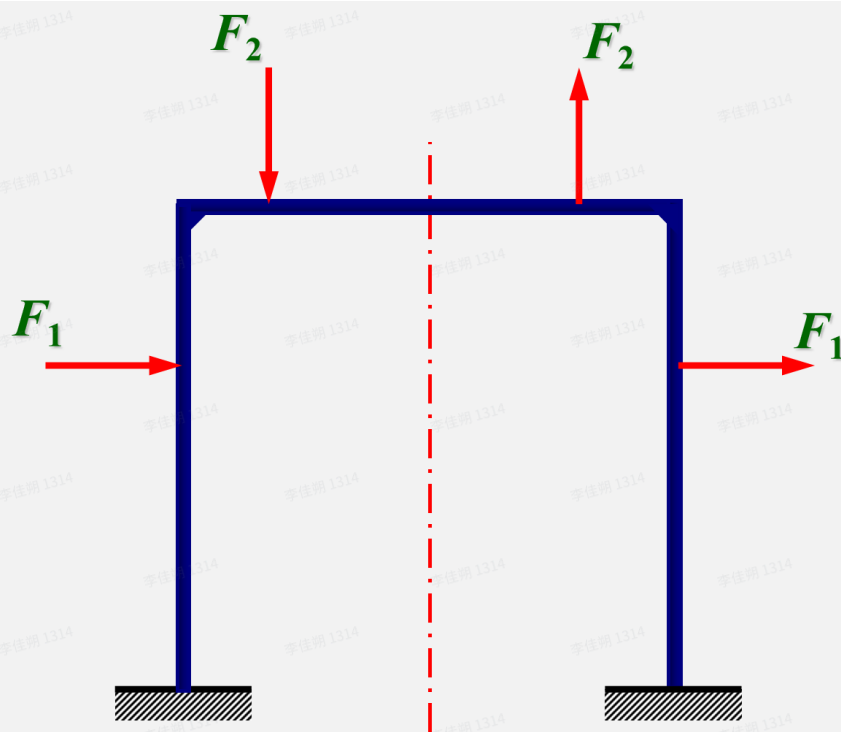
3. 对称结构、对称载荷、反对称载荷



对称结构 (symmetrical structure): 若将结构绕对称轴对折后, 结构在对称轴两边的部分将完全重合.

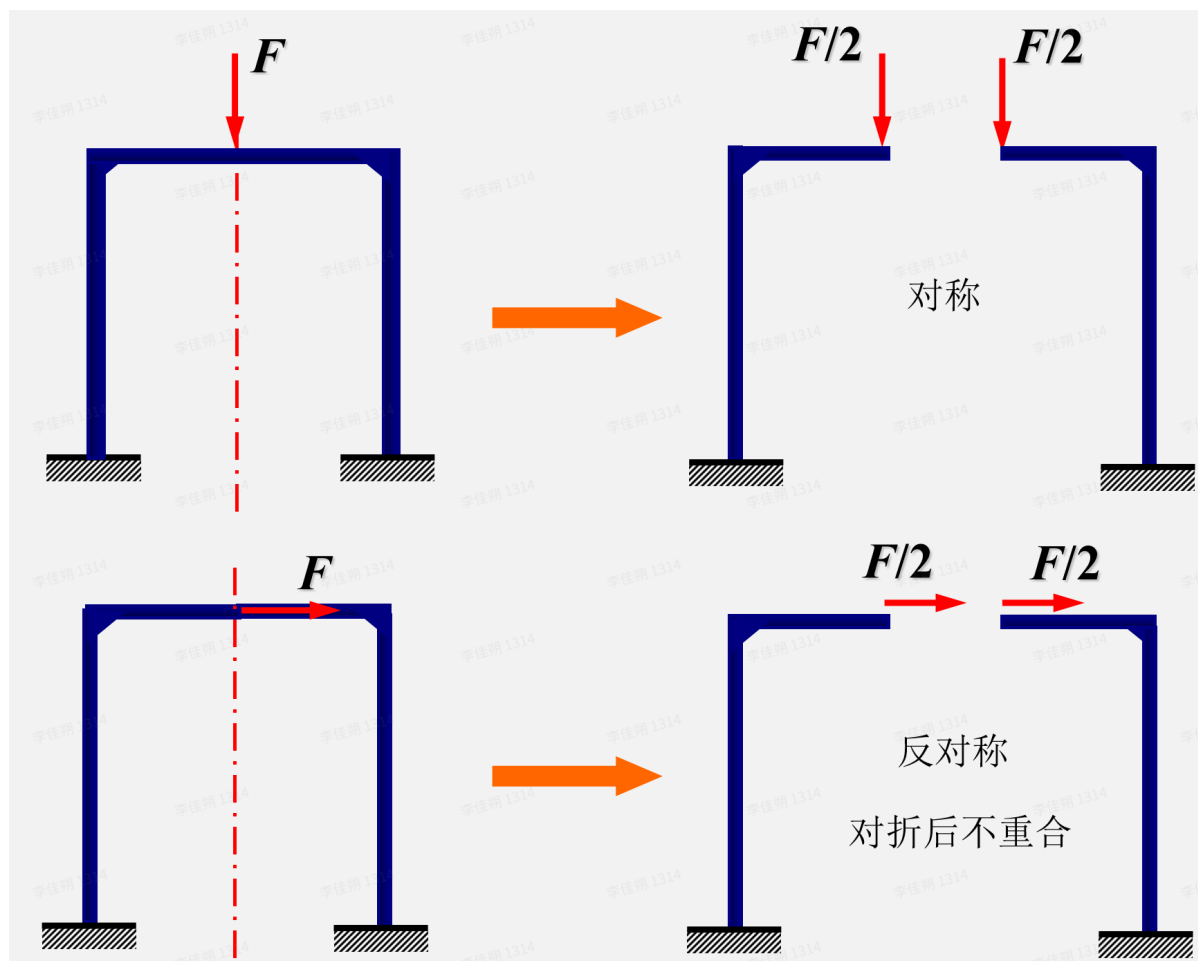


对称载荷 (symmetrical load) :绕对称轴对折后,结构在对称轴两边的载荷的作用点和作用方向将重合,而且每对力数值相等.



反对称载荷 (Antisymmetrical load) :绕对称轴对折后,结构在对称轴两边的载荷的数值相等,作用点重合而作用方向相反.

对称轴等分



4. 对称与反对称性质的应用

例如:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0$$

对称内力, 在对称面上的载荷是对称的, 即没有剪力

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0$$

反对称内力, 在对称面上的载荷是反对称的, 即只有剪力

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0$$

历年卷(欢迎更新)

1. 23-24 : <https://www.cc98.org/topic/5918995> + <https://www.cc98.org/topic/5918576>
2. 22-23 : <https://www.cc98.org/topic/5634066>
3. 一些历年卷: <https://www.cc98.org/topic/4965918> + <https://www.cc98.org/topic/4932363> + <https://www.cc98.org/topic/4932222>
4. 21-22: 智云课堂扒下来的: 目21-22材力历年卷1 目21-22材力历年卷2
5. 19-20: 智云课堂扒下来的:

材力公式自测



本文档只是考察公式内容，非公式内容需自行查看补天笔记

拉压问题

1. 横截面轴向应力
2. 斜截面应力
3. 断后伸长率
4. 截面收缩率
5. 变形量
6. 胡克定律
7. 泊松比
8. 应变能
9. 应变能密度
10. 热变形量与热应变

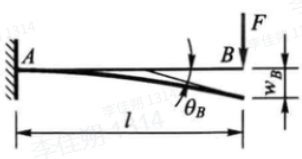
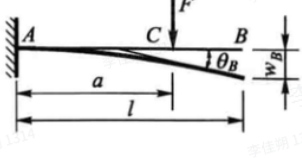
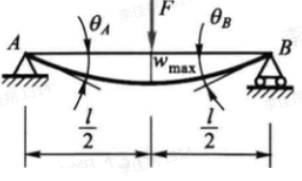
扭转问题

1. 输入功率与转矩（写单位）
2. 薄壁圆筒的切应力
3. 剪切胡克定律
4. 三个弹性常数之间的关系
5. 圆轴扭转时的切应力 τ_ρ
6. 抗扭截面系数 W_t
7. 圆轴扭转时的最大切应力 τ_{max}
8. 实心轴与空心轴的 I_P 和 W_t
9. 扭转强度条件、扭转刚度条件
10. 圆轴扭转时的变形（微分、积分、单位长度扭转角[单位rad/m、°/m]）
11. 圆轴扭转的应变能

12. 弹簧内力
13. 弹簧应力的修正(写出c的含义及公式、不写k的公式)
14. 矩形截面 W_t 、 I_t
15. 狭长矩形截面 W_t 、 I_t
16. 开口薄壁杆件 I_t ，扭转角、切应力、切应力最大值
17. 闭口薄壁杆件扭转切应力最大

弯曲问题

1. 载荷集度、剪力和弯矩关系
2. 曲率半径与弯矩关系
3. 正应力 σ 、抗弯截面系数 W_z 、最大正应力 σ_{max}
4. 圆截面、矩形截面、空心圆截面、空心矩形截面 I_z 和 W_z
5. 切应力(说明各字母的含义)
6. 矩形截面梁最大切应力
7. 圆形截面梁最大切应力
8. 挠度与转角的关系
9. 挠曲线微分方程
10. 位移边界条件和光滑连续条件
11. 填补表中空白

2		$w =$	$\theta_B =$	$w_B =$
3		$w =$ $w =$	$\theta_B =$	$w_B =$
8			$\theta_A = -\theta_B =$	$w_{max} =$

12. 弯曲变形的应变能

强度理论

1. 含内压的薄壁圆筒的应力(方向+大小[三个])
2. 解析法求 σ_α , τ_α
3. 求最大正应力方位角 α_0 的公式
4. 最大与最小正应力
5. 求最大切应力方位角 α_1 的公式
6. 最大与最小切应力
7. 纯剪切状态正应力方向与大小
8. 广义胡克定律
9. 体应变(用应变、主应力、应力各表示一次)
10. 体积改变能密度
11. 畸变能密度
12. 应变能密度
13. 四个相当应力
14. 偏心压缩中性轴方程
15. 截面核心的确定方法
16. 扭弯组合的第三、第四强度条件
17. 圆轴(空心与非空心均可)扭弯组合的强度条件

压杆稳定

1. 欧拉公式的普遍形式
2. 不同支撑情况的长度系数
3. 压杆柔度
4. 临界柔度(2个)
5. 临界应力(3种情况, 分别是什么柔度杆)
6. 压杆稳定性条件

动载荷

1. 自由落体冲击问题的动荷系数
2. 水平冲击问题的动荷系数
3. 比较动荷系数的方法

交变应力

- 1. 循环特征(应力比)
- 2. 平均应力
- 3. 应力幅

能量法

- 1. 组合变形的应变能
- 2. 纯剪切应力状态下的应变能密度
- 3. 变形能的普遍表达式
- 4. 功的互等定理
- 5. 位移互等定理
- 6. 莫尔定理
- 7. 图解法
- 8. 卡氏定理
- 9. 三角形、直角三角形、二次抛物线(上凸、下凹)、n次抛物线(下凹)的形心横坐标和面积
- 10. 矩形的 I_x 与 I_y
- 11. 不限于线弹性问题的定理

超静定问题

- 1. 对称与反对称性质的应用