I choose to Lying Flat

Daily Reminder

beautiful things happen
when you do the work to reprogram
that negative voice in your head

日期: /

向量整合

模、相等概念　单位向量　零向量

夹角 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$　加、减、数乘

证垂直　数量积（点乘）　交换、结合、分配律

证平行　向量积（叉乘）　右手螺旋

反交换、结合、分配

证共面　混合积 $(a\times b)\cdot c$　平行六面体体积

☆轮换性

引入坐标系

方向角：$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$ → 方向余弦

$$a\cdot b = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$(a\times b)\cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

日期: /

平面方程 点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

一般式 $Ax+By+Cz+D=0$

截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

点到平面距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ (P75)

点乘计算 $\vec{P_0P}\cdot\vec{n_0}$ (单位法向量)

直线方程 点向式/对称式 $\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$

一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

参数式 $\begin{cases} x=x_0+u_xt \\ y=y_0+u_yt \\ z=z_0+u_zt \end{cases}$

两点式 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

日期:　　/

点到直线距离 $d=\dfrac{|\vec{u}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{u}|}$ （$\vec{u}$ 方向向量）

平面束方程 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

（通过 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 这一直线的平面束）

异面直线距离 $h=\dfrac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$ （$\vec{u}$, $\vec{v}$ 方向向量）

曲面方程 一般式 $F(x,y,z)=0$

参数式 $\begin{cases}x=x(a,b)\\y=y(a,b)\\z=z(a,b)\end{cases}$

曲线方程

一般式 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\H(x,y,z)=0\end{cases}$

参数式 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$

日期:　　/

圆柱螺旋线 $\begin{cases} x=a\cos wt \\ y=a\sin wt \\ z=vt \end{cases}$

旋转曲面　某曲线绕直线旋转一周产生

柱面　一条直线沿一条曲线平行移动生成的曲面

直线 → 母线　曲线 → 准线

投影柱面　曲线消去 z ⇒ $F(x,y)=0$

XOY 平面的投影柱面

投影曲线 $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

锥面　过定点的直线沿不过此定点的一条曲线移动所生成的曲面。

直线 → 母线，定点 → 顶点，曲线 → 准线

☆ 采用　顶点 → 曲面点 (x,y,z) 必平行于顶点

→ 曲线点 (x_0,y_0,z_0)　x_0,y_0,z_0 用 x,y,z 表示

→ 代入曲线式.

日期: /

二次曲面　　截痕法作图

椭球面　　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

椭圆抛物面　　$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

单叶双曲面　　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

直纹面　　两族直线构成的曲面

双叶双曲面　　$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

双曲抛物面　　$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ （马鞍面）

日期: /

多元函数总结

n维欧氏空间 δ邻域 空心邻域

内部 int D 内点、外点、界点

D^c 补集 孤立点

$D = \text{int} D$ 开集 D^c为开集 → D为闭集

有界集，无界集 连通

连通的开集 → 区域，开区域 +边界 → 闭区域

定义域，值域

极限（从所有路径趋向一点都有相同的极值）

重极限（二重极限）→ (x_0, y_0)

累次极限（二次极限）→ x_0，→ y_0

Δz 全增量 $= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

关于 x 的偏增量 $= f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$

偏导数 全微分 $dz = A\Delta x + B\Delta y$

线性主部

可微 → 可偏导

↘ 连续

两个偏导数连续 → 可微

日期: /

☆ 若 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，则 $f''_{xy}=f''_{yx}$

复合函数偏导：链式法则

由 $F(x_1, x_2 \dots u)=0$ 所确定的 $u=f(x_1,x_2\dots x_n)$

称为隐函数

① 若 F 在以 (x_0,y_0) 为内点的区域上连续

$F(x_0,y_0)=0$.

$F_x'(x,y)$, $F_y'(x,y)$ 在区域内存在且连续

$F_y'(x_0,y_0)\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$$ （链式法则引伸）

②

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

则 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x' & F_v' \\ G_x' & G_v' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u' & F_v' \\ G_u' & G_v' \end{vmatrix}}$$ …

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u' & F_v' \\ G_u' & G_v' \end{vmatrix}$$

日期:　　/

极值

驻点　$f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$

驻点不一定是极值点

判断极值

当 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$

令 $A=f_{xx}''$　$B=f_{xy}''$　$C=f_{yy}''$

- 若 $B^2-AC<0$　则为极值点
  - ($A>0$ 极小值，$A<0$ 极大值)
- $B^2-AC>0$　不是极值点
- $B^2=AC$　无法判断

条件极值
(拉格朗日乘数法)

条件 $g(x,y)=0$　求 $f(x,y)$ 极值 (P点)

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_x'|_P=f_x'|_P+\lambda g_x'|_P=0 \\ L_y'|_P=f_y'|_P+\lambda g_y'|_P=0 \\ g(x,y)|_P=0 \end{cases}$$

二元泰勒

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)$$

(中值定理)

$$\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}C_n^i\frac{\partial^n f}{\partial x^i\partial y^{n-i}}\underbrace{(\Delta x)^i(\Delta y)^{n-i}}_{\text{保留}x,y}\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

日期: /

方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0}=f_x'(M_0)\cos\alpha+f_y'(M_0)\cos\beta+f_z'(M_0)\cos\gamma$

$=(f_x'(M_0),f_y'(M_0),f_z'(M_0))\cdot$

$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ (方向单位向量

$=|(f_x'(M_0),f_y(M_0),f_z'(M_0))||\vec{l}|\cos\theta$

则 $\theta=0$ 时 $(\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0})_{max}$

梯度 $\mathrm{grad}f=(f_x'(M_0),f_y'(M_0),f_z'(M_0))$

向量函数 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 分量函数

切线 $\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$

法平面 $x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+\cdots=0$

切平面 $f_x'(x-x(t_0))+f_y'(y-y(t_0))+f_z'(z-z(t_0))=0$

曲面 $f=0$

日期: /

大汇总

二重积分

(或二维数量场)

几何：三维空间中求体积(曲顶柱体)

☆ 区域限制 (非定值)

$$\iint_D \underbrace{f(x,y)}_{顶} dxdy$$

投影底 → D

故不可用 D 条件替换 f(x,y).

可积条件(充分)：[$a \le x \le b$ $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$]^D

$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，f 在 D 上连续

对称性的使用

计算：① 化为累次积分 (找上下限函数)

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

x 正方向后穿过

② 变量替换

$(x,y) \to (u,v)$ 乘一个 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix}$

(极坐标最常用)

③ 对称性简化

三重积分

几何：三维数量场

同二重 累次积分 / 变量替换 (球/柱)

截面法 (切片累积)

$$\iiint_V \underbrace{f(x,y,z)dxdy}_{片}dz$$

$$= \int_a^b dx \overbrace{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \underbrace{\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz}_{薯条}}^{片}$$

(转二重)
转为在一面上的投影：

$$\Rightarrow \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

或转为一轴上的切片：

$$\int_a^b dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

(也可从垂直一轴切片
并用该轴变量表示片
面积.) 即转为重积分

日期:　　/

（质心 $\frac{\iiint_D x\rho \,dxdydz}{\iiint_D \rho \,dxdydz}$, … , … ）

I　$\iiint_D (x^2+y^2)\rho \,dxdydz$

曲线积分　连续曲线，光滑曲线，分段光滑曲线

第一类　弧长微分 $ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$

$\int_{L_{AB}} f(x,y,z)\,ds$　此时弧线有固定方程，故可以代入至 $f(x,y,z)$ 中

分段＋变量替换

第二类　物理意义：力沿弧线做功

$\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

$\vec{F}\cdot ds=P(x,y,z)\cdot dx+Q(x,y,z)\cdot dy+R(x,y,z)dz$

分段代入计算 / 换元

☆ 方向有要求

$\int_{L_{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$

$=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds$

格林定理　$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{L^+} Pdx+Qdy$

条件：连续偏导数（D内）

区域在左侧

日期: /

D为单连通区域(实心)

曲线与积分的无关性

(1) D中任意光滑闭曲线 L, $\oint_L Pdx+Qdy=0$

(2) D中任意光滑闭曲线 L, $\oint_L Pdx+Qdy$ 与路径无关

(3) $Pdx+Qdy$ 是u的全微分

(4) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在D中恒成立

当 $u(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$ (D中). 可微

且 $\text{grad}\ u=(P,Q)$

则 u为 $Pdx+Qdy$ 的原函数/势函数,

同时 $\nabla u=(P,Q)$ 为保守场/梯度场

牛顿-莱布尼茨

$$\int_{LAB} Pdx+Qdy=u(x,y)\Big|_A^B$$

曲面积分

第一类

几何:对面积的积分

$z=z(x,y)$

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{(z_x')^2+(z_y')^2+1}\,dxdy$$

$F(x,y,z)=0$

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\frac{1}{|F_z'|}\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}\,dxdy$$

第二类

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$ 点乘法向量

投影的积分

日期:　　/

高斯定理

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

$$= \oint\!\!\!\oint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

斯托克斯定理

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L P dx + Q dy + R dz$$

场论

$$f(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

$$\mathrm{grad}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = f$$

则 f 为梯度场　u 为势函数

日期: /