

第一课:

① 微分方程: 含未知函数的导数方程 $\rightarrow F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

线性: 未知函数及导数最多一次

例子: $xy' = \sin x$ (✓)

$y y' = \sin x$ (x)

$(y')^2 = \cos x$ (x)

② 阶: 未知函数的最高阶导数

$y'' + 4y' - 15y = 2$ (= 2阶)

$y'' = 2y'y^3$ (= 2阶) 且非线性

③ 系数: $\rightarrow$ 主要对线性方程而言

$y'' + 4y' = \cos x$ = 阶常系数

$x^2 y'' + xy' + y = x^2$ = 阶变系数

④ 齐次性:

$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$ 若 $f(x) = 0$ 齐次
 $f(x) \neq 0$ 非齐次

$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = 0 & \text{齐次} \\ y' + \frac{y}{x} = x^3 & \text{非齐次} \end{cases}$

$y'' + 4y' - 5y = 0$ = 二阶线性齐次微分方程

⑤ 课程板块核心:

chap 1. $y' + p(x)y = Q(x)$

chap 2. $y'' + p(x)y + q(x) = f(x)$

chap 3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z \\ \dot{y} = -x + 5y - z \\ \dot{z} = x - y + 3z \end{cases}$

类别 1. 一阶非齐次线性微分方程 (变系数)

2. 二阶变系数齐次线性微分方程

⑥ 解:

代入 $y = \varphi(x)$ s.t. $F(\dots) = 0$ 在某个区间成立: 则 $y = \varphi(x)$ 记为方程解

6.2)

特解: 确定解 没参数未知

6.3)

通解:

1) $\forall C_1 \dots C_n$ 彼此独立

2) $C_1 \dots C_n$ 的个数 = 阶数

3) 不保证 $\forall$ 特解 $\in$ 通解, 但 $C_1 \dots C_n$ 确定 $\rightarrow$ 特解

⑦ 使用定解条件: 解特解

7.1) 初始条件: 一个点的值 / 导数组成: $\begin{cases} S'' = 9 \\ S(1) = 2 \quad S'(1) = 3 \end{cases}$

7.2) 边值条件 / 边界条件:

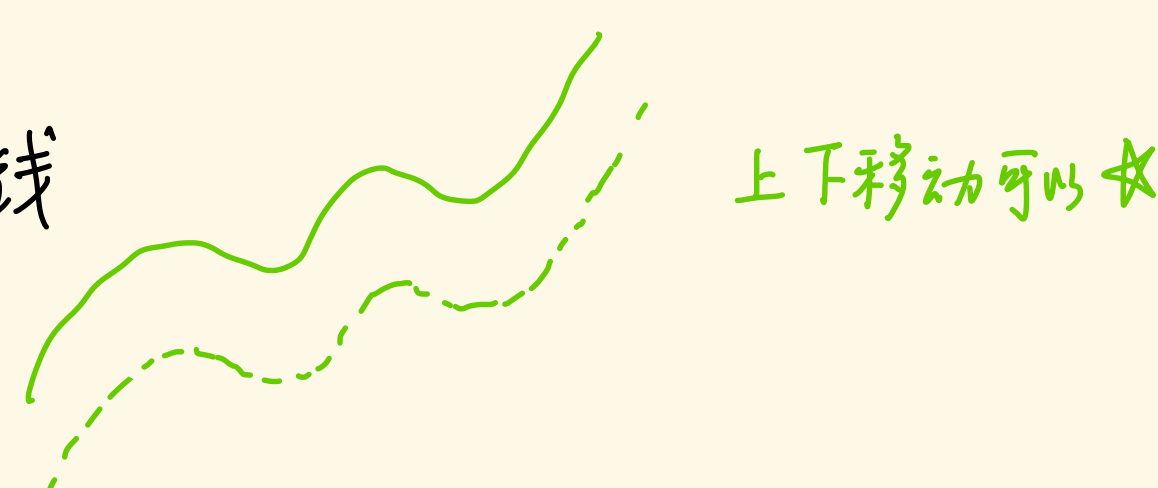
不少于 2 个点的条件 $\rightarrow S'' = 9, S(1) = 2, S(2) = 3$

⑧ 微分方程几何意义

$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \rightarrow$ 知斜率求可能曲线

存在性: 四各

important: 线性, 齐次性, 阶



方法概要

1) $\int f(x)dx = \int g(y)dy$

2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

F 是 f 原函数: 要求 $F' = f$ 在区间 (a, b) 成立

$\therefore$ 因此要令 $x > 0$ 或 $x < 0$ (-1, 1) 不行

一. 变量可分离

$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y)$

① $\psi(y) \neq 0 \rightarrow \frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx \rightarrow \int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C$

② $\psi(y) = 0 \rightarrow \forall y_0$ s.t. $\psi(y_0) = 0$ 为解

例子: $y' = y + 1 = \frac{dy}{dx}$

① $y \neq -1$

$\frac{dy}{1+y} = dx \rightarrow x = \ln|1+y| + C$

$e^{x-C} = |1+y| \quad y = \pm e^{-C} \cdot e^x - 1 = Ce^x - 1 \quad (C \neq 0)$

② $y = -1$ 代入 ✓

综上 $y = Ce^{-x} - 1 \quad (C \in \mathbb{R})$

例子 2: $e^x y' = \sqrt{y}(1+y)$

$e^x \frac{dy}{dx} = \sqrt{y}(1+y)$

if: $\frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)} = \frac{dx}{e^x} \quad (y \neq 0, \neq -1)$

积分: $\frac{2d(\sqrt{y})}{1+y} = \frac{dx}{e^x}$

$2\arctan\sqrt{y} = -e^{-x} + C$

不一定要写完 $y = \dots$ 的形式 (简单为主)

② $y = 0$ 代入 ✓

$y = -1$ 不合理

当解整合不了: $y = 0, 2\arctan\sqrt{y} = C - e^{-x}$

例子 3:

$dx + xydy = y^2 dx + ydy$

$(1-y^2)dx = \frac{y(1-x)dy}{y^2}$

$\frac{dx}{1-x} = \frac{ydy}{1-y^2}$

① $y^2 \neq 1$

$\int \frac{dx}{1-x} + \ln|1-x| = \frac{1}{2} \ln|1-y^2| + C$

$|1-x| = \sqrt{|1-y^2|} \cdot e^C$

$(x-1)^2 = |1-y^2| e^{2C}$

$1 + C(x-1)^2 = y^2 \quad C \neq 0$

② $y^2 = 1 \rightarrow$ 合并为 $y^2 = C(x-1)^2 + 1 \quad (C \in \mathbb{R})$

2. 变量型齐次方程 (与一般齐次无关)

$\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x})$

解: $y = ux$

$\therefore \frac{d(ux)}{dx} = u + x \frac{du}{dx} = g(u)$

即 $\frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}$

① 积分 $y = u_0 x$ 与 $\dots$

② $g(u_0) = u_0$

$\begin{cases} y' = (\frac{y}{x})^2 & \text{变量齐次} \\ y' + xy = 0 & \text{齐次} \\ y' + xy = x^3 & \text{非齐次} \end{cases}$

第二课:
 $\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x})$
例: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y} = \frac{y}{1+u} (u = \frac{y}{x})$
 $dy = u dx + x du$
 $\therefore u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1+u}$
即 $x \frac{du}{dx} = \frac{-u^2}{1+u}$
 $-\frac{(1+u)du}{u^2} = \frac{dx}{x} (u \neq 0)$
 $\frac{1}{u} - \ln|u| = \ln|x| + C$
 $\frac{1}{u} = \ln|ux| + C$
① $\frac{y}{x} = \ln|y| + C$
② $u=0$ 则 $y=0$ 代入成立
综上 $y=0$ 或 $\frac{y}{x} = \ln|y| + C$

- 所线性微分方程:

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$ 非齐
一. $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 齐次
变量分离 $\begin{cases} y=0 & \text{为解} \checkmark \\ y \neq 0 & \frac{dy}{y} = -p(x)dx \end{cases}$
 $\ln|y| = \int -p(x)dx + C \rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx} (C \neq 0)$
通解: $y = Ce^{-\int p(x)dx} \rightarrow$ 不用再添常数 C'
例3: $y' - \frac{1}{x}y = 0$
 $y = C|x| = Cx$

二. 非齐次

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$
设解 $y = u(x)e^{-\int p(x)dx}$ (常数变易法)
首先 $u(x)$ 一定存在:
若 $y = \ln x$ $u(x) = e^{\int p(x)dx} \cdot \ln x$ 若 $y = \sin x$ $u = \sin x \cdot e^{\int p(x)dx}$
其次这样设好算:
代入: $\frac{du}{dx} e^{-\int p(x)dx} = Q(x)$ $u(x) = \int e^{\int p(x)dx} Q(x) dx + C$
即 $y = e^{-\int p(x)dx} (C + \int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx)$ 积分都有 $e^{\int p(x)dx}$! 就算多了也可合并

例2: $z' + \frac{1}{x}z = 2$
 $p(x) = \frac{1}{x}$ $Q(x) = 2$
 $z = e^{-\ln|x|} (\int 2e^{\ln|x|} dx + C) = \frac{1}{|x|} (\int 2|x| dx + C)$
 $\begin{cases} \text{if } x > 0 & \frac{1}{x} (\int 2x dx + C) \\ \text{else } x < 0 & -\frac{1}{x} (\int -2x dx + C) = \frac{1}{x} (\int 2x dx + C) = x + \frac{C}{x} \quad \forall C \end{cases}$

例3: $(x-y)dx + xdy = 0$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$
 $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -1$
 $p = -\frac{1}{x}$ $q = -1$
 $e^{\int \frac{1}{x} dx} (\int -1 e^{-\frac{1}{x}} dx + C) = |x| (\int \frac{-1}{|x|} dx + C) = x(C - \ln|x|) \quad \forall C$
例3: $2x \frac{dy}{dx} - y = -x$
 $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = -\frac{1}{2}$
 $y = e^{-\int \frac{1}{2x} dx} (\int -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2x}} dx + C) = e^{-\frac{1}{2}\ln|x|} (\int -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2x}} dx + C) = \sqrt{|x|} \cdot (\int \frac{-1}{2\sqrt{|x|}} dx + C)$
 $\begin{cases} x > 0 & \sqrt{x} \cdot (-\sqrt{x} + C) = y = C\sqrt{x} - x \\ x < 0 & \sqrt{-x} \cdot x (\sqrt{-x} + C) = -x + C\sqrt{-x} \end{cases} \quad y = C\sqrt{|x|} - x (x \neq 0)$
例3: $\frac{dy}{dx} = y \cot x + 2x \sin x$ $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$
即 $\frac{dy}{dx} - \cot x \cdot y = 2x \sin x$
 $y = e^{\int \cot x dx} (\int 2x \sin x e^{-\int \cot x dx} + C)$
 $= |\sin x| \cdot (\int \frac{2x \sin x}{|\sin x|} dx + C)$
 $= \sin x \cdot (x^2 + C) \quad (\frac{x^2}{2} + C) \cdot 1 = 0$

例4: $(x+y)dy = dx$ 反意为主

$\frac{dx}{dy} = y + x$
 $\therefore \frac{dx}{dy} - x = y$
 $p = -1$ $q = y$
 $x = e^{\int dy} (\int y e^{\int dy} + C) = e^y (\int y e^{-y} dy + C) = e^y (-y - 1 + C) = x \quad (\forall C)$

方法2:

$x+y=u \rightarrow udy = dx \quad du = dx + dy$
 $u(du-dx) = dx$
 $\therefore udu = (u+1)dx$
 $\frac{udu}{u+1} = dx = (1 - \frac{1}{u+1})du \quad \text{if } (x+y \neq -1)$
即 $x = u - \ln|u+1| + C$
 $\begin{cases} x = x+y - \ln|x+y+1| + C \\ \text{及 } x+y = -1 \end{cases}$

三. 伯努利方程

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n \quad (n \in \mathbb{R})$

* $y^\alpha \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+u} \frac{d}{dx} (y^{1+n})$ 另类 $y=0$

若 $n \neq 0, 1$
 $y^{-n} \frac{dy}{dx} + y^{1-n} p(x) = Q(x) \quad (-n = \alpha)$
 $\rightarrow \frac{1}{1-n} \frac{d}{dx} (y^{1-n}) + p(x) y^{1-n} = Q(x) \quad (z = y^{1-n})$
 $\rightarrow \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x) z = Q(x) \quad (y \neq 0)$
补上 $y=0$ 情况

例: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 4\sqrt{y}$
 $z = y^{1-n} \quad (y \neq 0)$
 $\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} \sqrt{y} = 4$
 $2 \cdot \frac{d(\sqrt{y})}{dx} + \frac{2}{x} \sqrt{y} = 4$
 $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = 2$
 $z = e^{-\int \frac{1}{x} dx} (\int 2e^{\frac{1}{x}} dx + C) = \frac{1}{x} (x^2 + C) = \sqrt{y} \quad y=0$
例3: $(x^2+y)dy - 2xydx = 0$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2+y}$
 $\Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{2y} + \frac{1}{2x}$
 $x \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x^2 = \frac{1}{2}$
 $\therefore \frac{dx^2}{dy} - \frac{x^2}{y} = 1$
 $\therefore x^2 = y(\ln|y| + C) \text{ or } y=0$

例2: $\frac{dy}{dx} + x(y-x) + x^2(y-x)^2 = 1$
 $\frac{du}{dx} + 1 + xu + x^2 u^2 = 1 \quad \therefore \frac{du}{dx} + xu(1+ux^2) = 0$
 $du = dy - dx$ 即 $\frac{du}{u^2} dx + \frac{x}{u} = -x^3$
 $\frac{d(\frac{1}{u})}{dx} - x \cdot \frac{1}{u} = x^3$
 $e^{\int -x dx} (\int x^3 e^{\int -x dx} + C) = u = y - x = e^{\frac{1}{2}x^2} (\int x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + C) = e^{\frac{1}{2}x^2} (\int x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} d(x^2) + C)$
 $-2t e^{-t} - 2e^{-t} + C$
 $-2 \cdot \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-\frac{x^2}{2}} + C$
 $= -x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-\frac{x^2}{2}} + C$
 $-x^2 - 2 + C e^{\frac{x^2}{2}} + x = y$
or $x = y$

§4 全微分方程与积分因子

(1) $d(x^2y) = y^2 dx + x^2 dy = 0 \Rightarrow xy = C$
(2) $d(x^2y^3) = y^3 \cdot 2x dx + 3x^2 y^2 dy = 0 \quad x^2 y^3 = C$
真么的因吧! $\checkmark$ 做了
 $u(x, y) = \int M dx + N dy$ (曲线积分)
若 $du = M dx + N dy$ (u存在条件)
 $\therefore M = \frac{\partial u}{\partial x}, N = \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

例3: $x dx + y dy = 0$
 $d(x^2 + y^2) = 0$
 $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = C$
例3: $x dy - y dx = 0 \quad \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0$
 $d(\frac{y}{x}) = 0$
 $\frac{y}{x} = C$
 $\frac{1}{x^2} = \mu$ 叫微分因子 s.t. $\mu M dx + \mu N dy = 0$

$y dx + x dy + y^2 dy = 0$
 $\therefore d(xy + \frac{1}{3}y^3) = 0$
 $xy + \frac{1}{3}y^3 = C$

二. 积分因子

$M dx + N dy = du$
求 μ : $\mu M dx + \mu N dy = du'$
 $\Rightarrow \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad \therefore \frac{\partial \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \mu}{\partial y} M = \mu (\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x})$
1) μ 仅是 $f(x)$ $\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{u} (\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x})$
2) μ 仅是 $f(y)$ $\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{u} (\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x})$

例3: $y dx - x dy = 0 \quad M dx + N dy = 0$
 $\frac{1}{x} (\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = -\frac{2}{x} \Rightarrow \mu$ 仅是 x 函数 $\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}$ (找一下即可)
求解: $\frac{y dx - x dy}{x^2} = 0 \rightarrow d(\frac{y}{x}) = 0 \quad \therefore \frac{y}{x} = C$

第三课

2025年3月7日 星期五 10:30

preparatory knowledge

- (1) $ax^2+bx+c=0$ 若 r 是一根: $ar^2+br+c=0$
- (2) $z=1+\sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
- (3) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta) = re^{i\theta}$
- (4) $y''+py'+qy=0$
若 y_1, y_2 是解 y_1+y_2 也是解
若 y_1 是解: ky_1 是解
同理 $C_1y_1+C_2y_2$ 也是解

线性微分方程组 $\begin{cases} f(x)=0 & \text{齐次} \\ f(x)\neq 0 & \text{非齐次} \end{cases}$
 $f_n(x)y=f(x)$

一、二阶齐次线性方程 (常系数)

$y''+py'+qy=0$
猜想: $y=e^{rx}$ 得 $(r^2+pr+q)e^{rx}=0$
特征: $r^2+pr+q=0$

- ① 若 $p^2-4q>0$ 得 $y_1=e^{r_1x} y_2=e^{r_2x}$ 通: $C_1y_1+C_2y_2$
- ② $p^2-4q=0$ 有重根 r $y_1=e^{rx}$
设另一解 $y_2=u(x)e^{rx}$
得 $y'=xe^{rx}$ 是解 $\therefore y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}$
- ③ $p^2-4q<0 \Rightarrow r=\alpha\pm\beta i$
 $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$
pf: $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + i e^{\alpha x}\sin\beta x$
 $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - i e^{\alpha x}\sin\beta x$

$y''+4y'-5y=0$
 $r^2+4r-5=0$
 $r_1=1, r_2=-5$
 $y=C_1e^x+C_2e^{-5x}$

$y''+4y'+4y=0$
 $r^2+4r+4=0 \Rightarrow (r+2)^2=0$
 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$

$y''+4y'+7y=0$
 $-4\pm\sqrt{16-28} = -2\pm\sqrt{3}i$
 $C_1e^{-2x}\cos(\sqrt{3}x)+C_2e^{-2x}\sin(\sqrt{3}x)=y$

例子: $r_1=5, r_2=1 \Rightarrow C_1e^x+C_2e^{5x}$
 $r=3 \Rightarrow (C_1+C_2x)e^{3x}$
 $\frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = 1\pm 2i \Rightarrow e^{2x}(\cos 2x + i\sin 2x)$

二、(非齐次)

$y''+py'+qy=f(x)$
若 y_1 是齐次解 y_2 是非齐次解 y_1+y_2 是非齐次解
1. $y''+py'+qy=p_m(x)e^{\alpha x}$ 多项式 $\times e^{\alpha x}$
 $\tilde{y}=Q(x)e^{\alpha x}$ $\tilde{y}'=Q'(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{\alpha x}$ $\tilde{y}''=Q''(x)e^{\alpha x} + 2Q'(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{\alpha x}$
 $\Rightarrow [Q''+(2\alpha+p)Q'+(\alpha^2+p\alpha+q)Q]=p_m(x)$
(1) $\alpha^2+p\alpha+q\neq 0$ 例子: $\frac{d^2y}{dx^2}+y=(x-2)e^{2x}$
 $r^2+1=0 \Rightarrow r=\pm i \Rightarrow y_0=C_1\cos x+C_2\sin x$
(2) $\alpha^2+p\alpha+q=0$ $2\alpha+p\neq 0 \Rightarrow Q=xk_m(x)$ $(\alpha x+b)e^{3x}=\tilde{y} \Rightarrow Q(6+0)+(6+b)(7+1)=x-2 \Rightarrow a=\frac{1}{6}, b=\frac{-2-\frac{3}{6}}{10}=-\frac{13}{30}$
(3) α 是重根 $Q=x^2R_m(x)$

☆ 齐次通 + 非齐次特 = 非齐次通

$y''+4y'-5y=128xe^{3x}=p_m(x)e^{\alpha x}$
 $\alpha=3 \Rightarrow p_m(x)=128x$
 $r_1=3, r_2=2 \Rightarrow$ 即 α 非根
 $R_m(x)=Q(x) \Rightarrow \tilde{y}=(ax+b)e^{3x}$
代入解得: $\Rightarrow 16ax+10a+16b=128x \Rightarrow a=8, b=-5$ 即特解 $\tilde{y}$
通解: $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+(8x-5)e^{3x}$

例子: $y''+4y'-5y=36xe^x$ 1 是单根 or 令 $\tilde{y}=(ax^2+bx)e^x$ 代入算
 $\alpha=1 \Rightarrow p_m(x)=36x$ $x(ax+b)=Q(x)=ax^2+bx$
 $r_1=1, r_2=5 \Rightarrow$ α 是单根 $\therefore Q'(x)=(2ax+b)'=2a$
 $\tilde{y}=x(ax+b)e^x$ $Q'(x)=2ax+b \Rightarrow 2a+6(2ax+b)(2+4)=36x$
即 $(Q'+6Q)=36x \Rightarrow 2a+6(2ax+b)=36x \Rightarrow a=3, b=-1 \checkmark$
 $\tilde{y}_{特}=(3x^2-x)e^x$
通: $C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+(3x^2-x)e^x=y$

2. 自由项 $f(x)=p_m(x)e^{\alpha x}\cos bx / \sin bx$
 $\begin{cases} y''+py'+qy=p_m(x)e^{\alpha x}\cos bx \\ y''+py'+qy=p_m(x)e^{\alpha x}\sin bx \end{cases} \Rightarrow y''+py'+qy=p_m(x)e^{\alpha x} \quad (\alpha=a+bi)$
怎么求?

例子: $y''-y=e^x\sin 2x \Rightarrow e^{x+2ix}=e^{x(1+2i)}$
(1) $y''-y=e^{(1+2i)x}$ $r^2-1=0 \Rightarrow r=\pm 1 \Rightarrow y_0=C_1e^x+C_2e^{-x}$
(2) 求齐次通解 $x^2=0 \Rightarrow C_1e^x+C_2e^{-x}$ $Qe^{ax}=ke^{ax} \Rightarrow (a^2-k)=1 \Rightarrow k=\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{(1+2i)^2-1}=\frac{1}{4i-4}$
(3) 求特解 $\Rightarrow Q=Ce^{\alpha x}$ 代入解: $(b^2-C)e^{\alpha x}=e^{\alpha x}$ 得 $C=\frac{1}{b^2-1}=\frac{1}{(1+2i)^2-1}=\frac{1}{4i-4}$
得 $\rightarrow$ 是虚部为 $\sin 2x$ 提取: $-\frac{1}{4i-4}e^{(1+2i)x} = -\frac{1}{8}e^x[(1-i)(\cos 2x + i\sin 2x)] \rightarrow$ 取虚部: $-\frac{1}{8}e^x(\cos 2x + \sin 2x)$

变系数(一般解法)

① 欧拉方程 变系数方程: 变为一般的常系数方程.
 $x^n y^{(n)} + x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + xy' + y = f(x)$ 即 Euler 方程.

例如: $x^2y''+xy'+4y=8x^2 (x>0)$

基本思想: 换元 $x=e^t$ (若 $x<0 \Rightarrow x=-e^t$)
 $xy'=\frac{dy}{dt} \quad x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \quad xy'=\frac{dy}{dt} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}) = -\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{x^3}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$
得: $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=8e^{2t}$, 通: $y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+e^{2t} \Rightarrow y=C_1\cos 2\ln x+C_2\sin 2\ln x+x^2$

回忆欧拉法: ☆

算法: $x=e^t$ 先换元 $x^2y''+xy'+4y=6\ln x-\frac{1}{x} \Rightarrow x^2y''+xy'+4y=6t-\frac{1}{e^t}$
 $\begin{cases} D=\frac{d}{dt} \rightarrow xy'=\frac{dy}{dt}=Dy \\ x^2y''=D(D-1)y \end{cases} \Rightarrow D(D-1)y+Dy=6t-\frac{1}{e^t}$
得: $D^2y+4y=8e^{2t}$ 即 $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=8e^{2t}$ $y'=3t^2+e^{-t}C$
 $y=t^3-e^{-t}+Ct+D$

二、降阶 Liouville

$y=C(x)y_1(x)$
问题: $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 已知特解 y_1 , 求通解
= 降系数线性齐次方程 $y'+py'+qy_1=0$
 $y=Cy_1$ 为解 $\rightarrow y=Cy_1$ 变系数
代入方程: $u''y_1+u'(2y_1'+py_1)+qy_1u=0$
化为 $u''+p(x)u'=0$ $u''y_1+u'(2y_1'+p(x)y_1)+qy_1u=0$
 $u=C_1\int\frac{1}{y_1}e^{-\int p(x)dx}dx+C_2$ 令 $u'=z \Rightarrow y\frac{dz}{dx}+(2y_1'+p(x)y_1)z=0$
 $y=\int\frac{1}{y_1}C_1\int\frac{1}{y_1}e^{-\int p(x)dx}dx+C_2$ $\frac{dz}{z}=-\frac{2y_1'+p(x)y_1}{y_1}dx = (-\frac{2y_1'}{y_1}-p(x))dx$
 $z=\frac{C}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$
猜特解: $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$ $z=y_1[C_1+C_2\int\frac{1}{y_1}e^{-\int p(x)dx}dx]$
解: 从 x^2 开始 $\rightarrow \lambda=1, -1$
简: e^x
难: ...

例子: $y_1=\frac{\sin x}{x}$ 是 $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ 解?
 $y=y_1(C_1+C_2\int\frac{1}{y_1}e^{-\int p(x)dx}dx)$ $(\cot x)'=-\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$
 $=y_1(C_1+C_2\int\frac{x'}{\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{x^2})=\frac{\sin x}{x}(C_1+C_2\int\frac{dx}{x\sin^2 x})=\frac{\sin x}{x}(C_1+C'\cot x)$ 略

原理的多种思考: 令 $L[y]=\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y$ 定理 2.1 如果 $p(x)$ 与 $q(x)$ 连续, $y^{(0)}|_{x=x_0}=y_0^{(0)}$
 $L[cy]=cL[y]$ 则 $\exists$ 唯一 $y=y(x)$ s.t. 满足初值条件与方程
 $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$ (看法: 给 n 个条件一定 y 唯一)

定理 2.2 若 $y_1, \dots, y_{n-1}$ 是方程 $LY=0$ (齐次) 的解
 $y=\sum_{i=1}^n C_i y_i$ 也是

定义 2.1: $y_1(x), \dots, y_n(x)$ 是 n 个区间上函数

若有不为 0, $a_1 \sim a_n$ s.t. $\sum_{i=1}^n a_i y_i(x) \equiv 0 \Rightarrow$ 线性相关

2.2: $\omega(x)=\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

定理 2.3 $y_1 \sim y_n(x)$ 线性相关 $\Leftrightarrow \omega(x) \equiv 0$

定理 2.3 的逆: 若 $a_1y_1+\dots+a_ny_n=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1y_1+\dots+a_ny_n=0 \\ a_1y_1'+\dots+a_ny_n'=0 \\ \vdots \\ a_1y_1^{(n-1)}+\dots+a_ny_n^{(n-1)}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$
有非 0 解, 则应用 $\omega(x) \equiv 0 (x \in [a, b])$

☆ 齐次线性微分方程结构 rule:

2.4 $y_1 \sim y_n$ 是方程 n 个线性无关解, 则通 $y(x)=\sum_{i=1}^n C_i y_i(x)$

给定 V 初始条件:

若 $y_1 \sim y_n$ 线性无关: 基本解组

2.5 方程必须有 n 个线性无关解

构造 $y^{(0)}(x_0)=1, y^{(i)}(x_0)=0 (i=1, \dots, n-1)$

$\omega(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

三、非齐次线性微分方程

第四次课

2025年3月21日 星期五 10:02

齐次通, 求非齐次特

$$\ddot{y} + p(x)\dot{y} + Q(x)y = 0 \rightarrow \text{通解: } C_1 y_1 + C_2 y_2$$

★ $\ddot{y} + p(x)\dot{y} + q(x)y = f(x)$ 求非齐次特解

设所求特解: $\tilde{y} = u_1 y_1 + u_2 y_2$ "求特"

$$\tilde{y}' = (u_1 y_1' + u_2 y_2') + (u_1' y_1 + u_2' y_2) \quad \text{⑤ 令}=0$$

$$\tilde{y}' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

$$\tilde{y}'' = \dots$$

代入方程: $u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x)$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \leftarrow \text{无限制} \quad \text{对照 } p_m(x) e^{\alpha x} \cos x \beta$$

$$\text{通: } C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^x = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 = u_1' e^x + u_2' e^{2x}$$

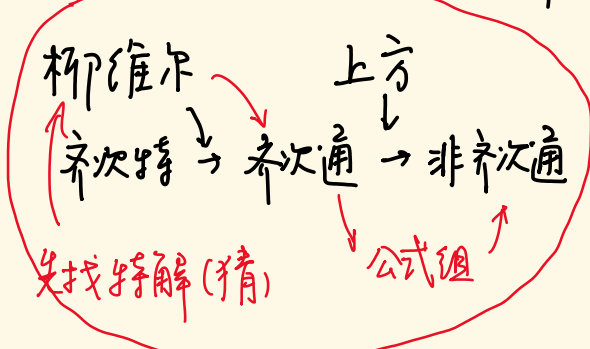
$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = 0 + f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = u_1' e^x + 2u_2' e^{2x}$$

$$u_2' e^{2x} = \frac{1}{1+e^{-x}} = e^{-x} \cdot \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = e^{-x} \left(1 - \frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{1}{e^{2x} + e^x} = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow u_2 = -e^{-x} - \ln(1+e^{-x})$$

$$-\frac{1}{1+e^{-x}} = u_1' e^x \Rightarrow u_1' = -\frac{1}{e^x + 1} = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \therefore u_1 = \ln(1+e^{-x})$$

非齐次通解 = 齐次通解 + 非齐次特解



第三章: 常系数线性微分方程

消元变高阶方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 2y + e^{3t} \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 2y \end{cases} \Rightarrow \text{消 } y \quad \text{把 } y = \dots \quad \downarrow \text{代入②方程}$$

有 $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 5e^{3t}$

特征值法:

(1) 回忆 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ if 不全为0, k_1, k_2 s.t. $A \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$

(2) $(\lambda E - A) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 0$

$|\lambda E - A| = 0$

(3) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2+\lambda)(\lambda-5) + 12 = 0 \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

猜解 $k_1 e^{\lambda t} + k_2 e^{\lambda t} \rightarrow$ 求 λ 与 $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$

复特征值

$A\zeta = \lambda\zeta$

则 $\overline{A\zeta} = \overline{\lambda\zeta} = \overline{A\zeta} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\zeta}$

$\therefore \overline{\lambda}$ 也为特征值, $\overline{\zeta}$ 为特征向量

$\frac{dx}{dt} = -y \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = \pm i$
 $\frac{dy}{dt} = x \quad \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{it} \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} e^{-it}$

$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \cos t + i \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \\ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \cos t + i \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$

$(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) (\cos t + i \sin t)$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$

消元: $\frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0$

$r^2 + 1 = 0 \quad r = \pm i$

$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

第五次课

2025年3月28日 星期五 10:00

一阶常系数线性非齐次

准备①: 同齐次。 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \rightarrow n$ 未知数

$\vec{v}_i e^{\lambda_i t} = \vec{x}_i$

$\vec{x} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{x}_i$

not just and

准备②: $[a_{ij}(t)]' = [a'_{ij}(t)]$

规定 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{x} \quad \vec{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

③: 若 $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ 为 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ 的解 $\leftrightarrow$ 左右相等

④: 记 $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n] = X$ 基解矩阵 $(n \times n)$

$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \vec{c}(t)$

⑤: $X' = [\frac{d\vec{x}_1}{dt} \quad \frac{d\vec{x}_2}{dt}] = A[\vec{x}_1, \vec{x}_2] = AX$

⑥: $\frac{d}{dt}[X\vec{c}] = \frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} x_1, x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix}\right) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 \end{bmatrix} = 4I\vec{x} = X\vec{c}' + X'\vec{c}_t$

1. 求非齐次特解

$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t) \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$ 向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{\lambda_1 t} & 3e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_1 t} & 2e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t)$ 比如 $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$

若齐次通解为 $c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 = \vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1, \vec{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = X\vec{c}(t)$ 代入方程 $\frac{d}{dt}[X\vec{c}(t)] = AX\vec{c}(t) + \vec{f}(t) = X'\vec{c}(t) + X\vec{c}'(t)$ 由于 $X' = AX$

则 $X\vec{c}'(t) = \vec{f}(t)$ $\rightarrow$ 把 $\vec{c}(t)$ 积出来

已知
基解矩阵

记为:

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad \vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + \dots$

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$ 特解: $\vec{x}^* = c_1(t) \vec{x}_1 + c_2(t) \vec{x}_2 \iff [X\vec{c}'(t) = \vec{f}(t)]$

通解: 加起来

公式分析。

2元以上 推广 (exam)

例子:

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 2y + e^{3t} \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 2y + 0 \end{cases} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^t \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t}$

$\Downarrow$

$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{x}' = c_1(t) \vec{x}_1 + c_2(t) \vec{x}_2$

$X\vec{c}'(t) = \vec{f}(t) \therefore \begin{bmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ 2e^t & 3e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}$

答: $c_1 \begin{bmatrix} e^t \\ 2e^t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{bmatrix} + 2e^t \cdot \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{bmatrix} - 1.5e^{2t} \begin{bmatrix} e^t \\ 2e^t \end{bmatrix}$
加由: $\begin{bmatrix} 2.5e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{bmatrix}$

消元法:

$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 5e^{3t}$

$x = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{5}{2} e^{3t}$

消元法 $\rightarrow$ 二元
特征值 $\rightarrow$ 二元
重根: 不考

理论部分

2025年3月28日 星期五 10:55

背景：弹簧，电路，阻尼

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$$

$f(x)=0$ 线性齐次

① 若有初值条件： $y^{(i)}|_{x=x_0} = y_0^{(i)} (i=0, \dots, n-1)$

则 $\exists$ $p(x)$ 为唯一存在解

② 若 $y_0^{(i)} = 0$ 则 $p(x) = 0$

齐次线性微分方程结构

① 线性无关

recall $AX=0$ (线性方程)

ξ_1, ξ_2 为解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 为解

η_1, η_2 为 $AX=b$ 解 $\eta_1 - \eta_2$ 为 $AX=0$ 解

ξ_1, η_1 为 $\xi_1 + \eta_1$ 为 $AX=b$ 解

若 η 为非齐次特解, ξ 为齐次通解

$\eta + \xi$ 为 $AX=b$ 通解

那微分方程?

$LY=f(x)$ 非齐次

性质: $L[cy] = cL[y]$

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

若 $y_1 \dots y_m$ 是 $L[y_i] = 0$ 解

那么 $\sum C_i y_i$ 也是解

通解:

(1) 有彼此独立任意常数

(2) $C_1 \dots C_n$ 个数 = "n"

(3) 过平面 V 一点, 均可有 C_i 成立!

线性相关/无关

两个函数:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$$

若 a_1, a_2 中有一个 $\neq 0$

则 $y_1 + \frac{a_2}{a_1} y_2 = 0$ 即 $=$ 为倍数

多个解无关, 相关? Wronsky 行列式

$$\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_m \\ y_1' & \dots & y_m' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_m^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \iff \text{相关 (恒=0)}$$
$$\neq 0 \iff \text{无关}$$

若对 n 阶方程, 有 n 个线性无关解, 通 = $\sum_{i=1}^n C_i y_i$ 若可找到 $y_1 \dots y_n$ 叫基解组

是否一定有? 是的, 且恰 n 个

进阶 $\tilde{y}(x)$ 是特解 则 通解 + $\tilde{y}(x)$ 是通解

叠加原理2:

$\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ 是 $L[y] = f_{1,2}(x)$ 解

$y_1 + i y_2$ 是 $L[y] = f_1(x) + i f_2(x)$ $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ 分别为 $L[y] = f_{1,2}(x)$ 的解

一阶方程组

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f(t, x, \frac{dx}{dt} \dots \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}) \iff \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \vdots \\ \frac{dx_{m-1}}{dt} = x_m \\ \frac{dx_m}{dt} = f(t, x_1, \dots, x_m) \end{cases}$$

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \sin t$$

$$\Downarrow \frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 3x_3 - 2x_2 - x_1 + \sin t$$

线性微分方程组

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$$

$f(t)=0$ 齐次

$f(t) \neq 0$ 非齐次

1. 给定初始条件 $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ 可保证有解且唯一

2. 通解(结构) $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$ 有 m 个解

则 $\vec{x}_{new} = \sum_{i=1}^m C_i \vec{x}_i$ 也是解

线性无关: 若有 $\sum C_i \vec{x}_i = 0$ ($\exists C_i \neq 0$) 则线性相关

证明: $\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \dots \vec{v}_n e^{\lambda_n t}$ 线性无关 (其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$, $\vec{v}_i \neq 0$)

Wronsky 行列式: $\vec{x}(t) = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n] \rightarrow n \times n$ 阵

若 $|W|=0$ 线性相关 (恒=0)

第二章: 求导后构成 W 性质: $W=0$ or $W \neq 0$

若可找到 n 个线性无关解, 则通 = $\sum_{i=1}^n C_i \vec{x}_i$

一定吗?

✓

非齐次通解: 齐次通 + 非齐特

例如重根 (特征值)

若 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ 有 2 重根 λ

$$(A - \lambda_0 E)^2 \vec{v}_0 = 0 \Rightarrow \vec{v}_0 \rightarrow \text{两个}$$
$$(A - \lambda_0 E) \vec{v}_0 = \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_1 \rightarrow \text{两个}$$
$$(\vec{v}_0 + t\vec{v}_1)e^{\lambda_0 t} \checkmark$$

对应 "2" 个解

$$\begin{cases} (A - \lambda_0 E)^3 \vec{v}_0 = 0 \\ (A - \lambda_0 E) \vec{v}_0 = \vec{v}_1 \\ (A - \lambda_0 E)^2 \vec{v}_0 = \vec{v}_2 \end{cases}$$

$$\text{例3: } \begin{cases} x' = y \\ y' = -9x + 6y \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -9 & 6-\lambda \end{pmatrix} \therefore \lambda(\lambda-6)+9=0 \quad \lambda_1=3$$
$$\text{那 } \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \vec{v}_0 = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_0 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{消元法 } \ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 0 \quad r=3 \quad x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$$

高阶变系数方程解法: p102页

例1: $y_1(C_1 + C_2 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} dx)$

思路2: $y = u y_1$

$$y_1 = e^{-\int \frac{p}{y_1} dx}$$

$$\text{代入 } \ddot{y} + p\dot{y} + qy = 0 \Rightarrow \ddot{u}v + \dot{u}(2\dot{v} + p\dot{v}) + u(\ddot{v} + p\dot{v} + qv) = 0 \quad \text{而 } \ddot{v} + p\dot{v} + qv = (-\frac{1}{2}p') + p(-\frac{1}{2}p') + qv = (q - \frac{p^2}{4} - \frac{1}{2}p')v = -\frac{q}{4}v$$

若 $2p' + p^2 - 4q = a$ 时

$$\text{令 } y = uv \quad v = e^{-\int \frac{p}{2} dx}$$

则 $\ddot{u} - \frac{a}{4}u = 0$ 得到 u 有常数 ✓

$$\text{例2: } \ddot{y} + x\dot{y} + \frac{1}{4}(x^2+1)y = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot 1 - (x^2+1) = 1 = a$$

$$e^{-\int \frac{x}{2} dx} = v = e^{-\frac{1}{4}x^2}$$

$$\text{而 } \ddot{u} - \frac{1}{4}u = 0 \quad u = C_1 e^{\frac{1}{4}x} + C_2 e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$y = uv = (C_1 e^{\frac{1}{4}x} + C_2 e^{-\frac{1}{4}x}) e^{-\frac{1}{4}x^2}$$

微分形式的求解

复习总

2025年3月7日 星期五 22:15
PFE: 微分方程 (ODE) $f(x, y, y' \dots y^{(n)}) = 0$ 如果 y 是一个向量函数 一阶微分方程

知识核心 - 阶方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (30~40%)

例 1: $x \frac{dy}{dx} + y = xy \frac{dy}{dx}$

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = \sin^2(x-y+1)$$

if $\cos^2(u+1) \neq 0$ $\frac{d(u+1)}{\cos^2(u+1)} = dx$
 $\tan(x+1) = \tan(x-y+1) \quad (C \in \mathbb{R})$
 else $x-y+1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$

3. $y^2(x-3y)dx + (1-3xy^2)dy = 0$

打散: $y^2 x dx - 3y^3 dx + dy - 3x y^2 dy = 0$

$$\textcircled{1}(y \neq 0) = x dx + \frac{1}{y^2} dy - 3y dx - 3x dy = 0$$
$$d\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{y} - 3xy\right) = 0$$
$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{y} - 3xy = c \quad / \quad y=0$$

4. $(y-x^3) dx - 2x dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2}x^2$$
$$y = e^{\int \frac{1}{2x} dx} \left(\int -\frac{1}{2} x^2 e^{-\int \frac{1}{2x} dx} dx + C \right)$$
$$= \sqrt{|x|} \left(\int -\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sqrt{|x|}} dx + C \right)$$
$$= \sqrt{x} \left(-\frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} + C \right)$$
$$= c\sqrt{x} - \frac{1}{5}x^5$$

习惯上换元 $du = d(\frac{1}{2}(x^2+y^2))$

5. $y^2(xdx + ydy) + x(ydx - xdy) = 0$

$$(y^2x + xy) dx + (y^3 - x^2) dy = 0$$
$$\mu_M dx + \mu_N dy = 0$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$