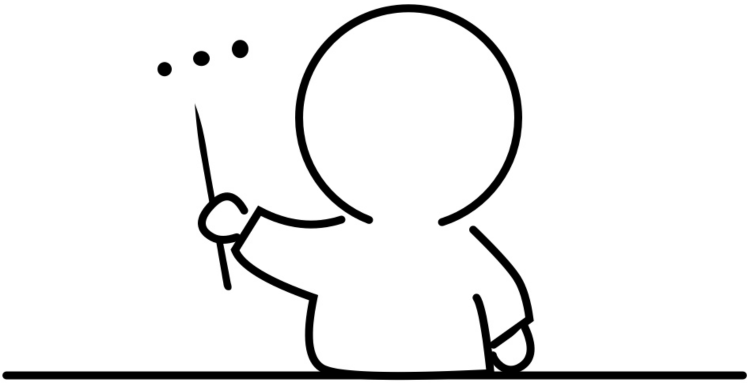
It's time for class

Daily Reminder



beautiful things happen
when you do the work to reprogram
that negative voice in your head

日期:　　/

解 = 积分 ($\Phi(x,y)=0$)

存在唯一性定理

初值问题　　初值条件

$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$　$y|_{x=x_0}=y_0$　$|x-x_0|\leq a$　$|y-y_0|\leq b$

则在 $|x-x_0|\leq h$ 内存在唯一 $y=\varphi(x)$，$h=\min(a, b/M)$

$M=\max|f(x,y)|$

可分离变量方程　$\frac{dx}{dy}=\varphi(x)\psi(y)$　左右分离 + $\psi(y^*)=0$ 的解

齐次方程　$\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})$　$u=\frac{y}{x}$　$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u=g(u)$

齐次线性方程　$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$　左右分离

一阶线性微分方程　$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$　$y=e^{-\int p(x)dx}[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C]$

伯努利方程　$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n$　$z=y^{1-n}$

全微分方程　充要条件　$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$（单连通G内连续且有连续一阶偏导）

① $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$　$u=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$　对y求导

② 凑　③ 找只和x或y有关的积分因子

~~二阶~~ 一阶微分方程　$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,\frac{dy}{dx})$　$p=\frac{dy}{dx}$　$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=f(y,\frac{dy}{dx})$　$p=\frac{dy}{dx}$　$\frac{dp}{dy}\cdot p=f(y,p)$

日期: /

线性微分方程 $L[y]=\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+p_n(x)y=f(x)$

先将 $p_i(x)$ 化为常系数 或降价

欧拉方程 →

转y-t方程

① $x>0$ 时引入 $x=e^t$，<0 引入 $x=-e^t$ (看f(x)定义域)

② 猜出 y_1，$y_2=uy_1$ 代入求解 u。(通解)

若① 则化为常系数线性微分方程

(一) 令 $f(x)=0$ 求方程通解 y

令 $y=e^{\lambda x}$，代入得到 λ 的 n 次方程 (特征方程)

求解，单根 $y=e^{\lambda_1 x}$

n_i 重根 $y=e^{\lambda_i x},\ xe^{\lambda_i x},\ \dots\ x^{n_i-1}e^{\lambda_i x}$

(二) 求特殊解 y^*

a. $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ 则令 $y^*=Q(x)e^{\alpha x}$

$Q''(x)+PQ'(x)(2\alpha+p)+Q(x)(\alpha^2+p\alpha+q)=P_n(x)$

1. $\alpha^2+p\alpha+q\neq0$ 则 α 不是特征方程根 $k=0$

2. $\alpha^2+p\alpha+q=0$ $(2\alpha+p\neq0)$ α 是特征方程单根 $k=1$

$(2\alpha+p=0)$ α 是特征方程二重根 $k=2$

(令 $y^*=x^k R_n(x)e^{\alpha x}$) 代回求解

日期: /

b. $y''+py+qy = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

构造 $Re(F(x)) = f(x)$ 实部是 $f(x)$

$$F(x) = P_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

形成新方程’ $y''+py+qy = F(x) = P_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$

$$y^{*'} = x^k R_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$k=0$ ($\alpha+i\beta$不是特征根) $k=1$ ($\alpha+i\beta$是特征根)

$\beta\neq 0$，则 $\alpha+i\beta$ 必有对应解 $\alpha-i\beta$，不是二重根

$L[y] = U(x)+iV(x)$ $y=u(x)+iv(x)$ 则 $L[u(x)]=U(x)$

则 $y^* = Re(y^{*'})$

C. $f(x) = \overbrace{P_n(x)e^{\alpha_1 x}}^{f_1(x)} + \overbrace{P_m(x)e^{\alpha_2 x}}^{f_2(x)}$

$L[y] = f_1(x)+f_2(x) \Rightarrow y^* = y_1^*+y_2^*$ $L[y_i^*] = f_i(x)$

则用①两次

d. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + P_n(x)e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x$

用②两次

若② 则令 $y^* = u_1y_1 + u_2y_2$ 　令 $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$

代入得 $u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x)$

$W(y) \neq 0$ 故有唯一解

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

则 $u_1' = \phi_1(x)$ 　$u_2' = \phi_2(x)$ 　　$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_1\int\phi_1(x)\,dx + y_2\int\phi_2(x)\,dx$$

线性微分方程组

(1) 消元法，化为一个未知数关于t的方程

(2) 矩阵法， 化为 $\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & \end{pmatrix}$$

则原方程组等价于 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + f(x)$ 　$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

先求通解 令 $x_i = v_i e^{\lambda t}$ 则 $\vec{x} = \vec{v}e^{\lambda t}$ (v是常向量) 　$\vec{v}\lambda e^{\lambda t} = A\vec{v}e^{\lambda t}$

$\lambda\vec{v} = A\vec{v}$ 则 λ为特征值 A为特征向量． $|\lambda E - A| = 0$

$x = v_k e^{\lambda_k t}$